## Exercice 1

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right)$$

**1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

**2.** On désigne par $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction $g$ admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

**3.** **a)** Soit $n$ un entier naturel quelconque.

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

**b)** Pourquoi peut-on en déduire que la suite $(u_n)$ est convergente ?

**c)** On note par $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$ . Déterminer $\ell$.

## Exercice 2

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}+$ on a $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$.

1. Soit $g$ définie pour $x \in \mathbb{R}+$ par $g(x) = \sin x - x$.
   (a) Etudiez $g$ et dressez son tableau de variations.
   (b) En déduire le signe de $g$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$.
   (a) Montrer que $f' = g$.
   (b) Dresser le tableau de variations de $f$.
   (c) En déduire l'inégalité à démontrer.

## Exercice 3

1. Soit $g$ la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 2$
   (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ , puis en $-\infty$.
   (b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que $-0,80 < \alpha < -0,79$
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$.
2. On considère la fonction $f$ définie $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x-1} - x^2$.
   On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = xg(x)$.
   (b) Etudier le signe de $xg(x)$.
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{(\alpha+2)}$
   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   (e) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses .
   (f) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.