BACCALAURÉAT BLANC

Le corrigé

Session 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures** – COEFFICIENT : **7**

SPECIALITE

Exercice 1 **4 points**

1. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée.
On a alors :

a. $f'(x) = 0$ **b.** $\boxed{f'(x) = \ln(x)}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$

Pour tout $x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

2. Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2$ appartiennent à l'intervalle :

a. $\left]-\infty~;~\dfrac{\ln 3}{\ln(5,7)}\right]$ **b.** $\left]-\infty~;~\ln\left(\frac{0,5}{0,95}\right)\right]$ **c.** $\left]-\infty~;~\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\right]$ **d.** $\boxed{\left[\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}~;~+\infty\right[}$

$6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2 \iff 6 \times 0,95^n \leqslant 3 \iff 0,95^n \leqslant \dfrac{3}{6} \iff 0,95^n \leqslant 0,5$

$\iff \ln(0,95^n) \leqslant \ln(0,5) \iff n \times \ln(0,95) \leqslant \ln(0,5) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$ car $\ln(0,95) < 0$.

3. $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = 400 + 400 \times 0,5 + 400 \times 0,5^2 + \cdots + 400 \times 0,5^{10} =$
$400\left(1 + 0,5 + 0,5^2 + \cdots + 0,5^{10}\right) = 400 \times \dfrac{1 - 0,5^{10+1}}{1 - 0,5} = 800 \times \left(1 - 0,5^{11}\right)$.
Réponse c.

4. Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de 0,8. Les tirs sont supposés indépendants.
Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

a. 0,512 **b.** 2,4 **c.** 0,262 144 **d.** $\boxed{0{,}081\,92}$

À chaque tir il y a deux issues : il touche la cible, avec une probabilité de 0,8, ou il ne la touche pas. L'expérience est répétée 6 fois et les tirs sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où l'archer touche la cible.
La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,8$.
On veut détermine $P(X = 3)$: $P(X = 3) = \dbinom{6}{3} \times 0,8^3 \times (1 - 0,8)^{6-3} = 0{,}081\,92$

Exercice 2 **6 points**

1. **a.** En juin 2018, on peut estimer qu'il y aura $27500 - 150 = 27350$ étudiants dans cette université.
   b. À la rentrée de septembre 2018, il y aura à la suite de l'augmentation de 4 % :
   $1,04 \times 27350 = 28444$ étudiants.
2. Soit u_n le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2017 + n. En juin de l'année suivante (année $(n+1)$), 150 étudiants auront démissionné, pour un reste de $u_n - 150$. Puis à la rentrée de septembre de l'année $(n+1)$, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de 4 %, soit $1,04 \times (u_n - 150) = 1,04 \times u_n - 156$.
Donc en septembre de l'année $(n+1)$ il y aura $1,04u_n - 156$ étudiants, soit pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 1,04u_n - 156.$$
3. On complète les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

Variables :	n est un nombre entier naturel
	U est un nombre réel
Traitement :	n prend la valeur 0
	U prend la valeur 27 500
	Tant que $U \leqslant 33\,000$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	U prend la valeur $1,04 \times U - 156$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $2017 + n$

4. a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

b. La valeur affichée en sortie de cet algorithme est : $n = 6$.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3900$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3900 = 1,04 \times u_n - 156 - 3900 = 1,04 \times u_n - 4056 = 1,04\,(u_n - 3900)$
$v_{n+1} = 1,04\,v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 1,04 et de premier terme
$v_0 = 27\,500 - 3\,900 = 23\,600$.

b. Donc pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 23\,600 \times 1,04^n$.
De plus, On a $u_n = v_n + 3900$ donc $u_n = 3900 + 23\,600 \times 1,04^n$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de $q = 1,04$. $q > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est aussi égale à $+\infty$.
Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.

Exercice 3 **5 points**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,7\,;\,6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{4-3} = -4$. Donc $f'(3) = -4$.

2. La fonction f est décroissante sur les intervalles $[\,0,7\,;\,1]$ et sur $[\,2\,;\,6\,]$; elle est croissante sur l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$.
On peut donc en déduire le signe de f'sur l'intervalle $[\,0,7\,;\,6\,]$.

x	0,7		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

1. $f'(x) = (2x-2) \times \mathrm{e}^{-2x+6} + \left(x^2 - 2x + 1\right) \times (-2)\mathrm{e}^{-2x+6}) = \left(2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2\right) \times \mathrm{e}^{-2x+6}$
$= \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$

2. Pour tout $x \in [0,7\,;\,6]$, $\mathrm{e}^{-2x+6} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $-2x^2 + 6x - 4$.
$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4$, donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-6-2}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6+2}{-4} = 1$.
En utilisant le signe du trinôme du second degré, on établit le tableau de variations suivant :

x	$0,7$		1		2		6
$-2x^2+6x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	

3. **a.** La fonction f est concave sur les intervalles dans lesquels $f'' \leqslant 0$.
La ligne 3 donne la forme factorisée de la dérivée seconde f''. On en déduit que pour tout $x \in [\,0,7\;;\;6\,]$, $f''(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $2x^2-8x+7$. La ligne 4 permet de déterminer les solutions de l'équation $f''(x)=0$, ce qui nous donne les racines du trinôme. En utilisant le signe du trinôme du second degré, on en déduit que $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left[\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\;;\;\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

b. Avec les mêmes lignes, on peut aussi en déduire que la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe pour les deux valeurs $x_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}$.
La courbe représentative de la fonction f admet donc deux points d'inflexion d'abscisses x_1 et x_2.

Exercice 4 — 5 points

1. **a.** Le graphe possède 9 sommets, il est donc d'ordre 9.
b. La chaîne D – M – H – R – B – V – G – L – J permet de passer par tous les sommets ; le graphe est donc connexe.
c. Les sommets H et G ne sont pas adjacents. Le graphe n'est pas complet.

2. Le graphe possède plus de deux sommets (six sommets) de degré impair donc il ne possède pas de chaîne eulérienne. Sarah ne pourra pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3. **a.** On complète la matrice M d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0&0&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

b. Le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D est $M^4_{(1,2)} = 3$.
Il s'agit des chemins : B – R – H – M – D, B – V – L – M – D et B – V – J – M – D.

4. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra on obtient le tableau suivant :

B	D	G	H	J	L	M	R	V	Sommets
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	B
×	∞	∞	∞	∞	∞	∞	50 (B)	220 (B)	R (B)
×	∞	150 (R)	272 (R)	∞	∞	∞	×	220 (B)	G (R)
×	∞	×	272 (R)	∞	291 (G)	∞	×	220 (B)	V (B)
×	∞	×	272 (R)	412 (V)	291 (G)	670 (V)	×	×	H (R)
×	∞	×	×	412 (V)	291 (G)	567 (H)	×	×	L (H)
×	∞	×	×	412 (V)	×	567 (H)	×	×	J (V)
×	∞	×	×	×	×	567 (H)	×	×	M (H)
×	617 (M)	×	×	×	×	×	×	×	D (M)

Le plus court chemin permettant d'aller de B à D est le chemin

$$B \xrightarrow{50} R \xrightarrow{222} H \xrightarrow{295} M \xrightarrow{50} D$$

Il faut parcourir 617 km.