BACCALAURÉAT BLANC

Le corrigé

Session 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures** – COEFFICIENT : **7**

Exercice 1 **4 points**

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée.
On a alors :

a. $f'(x) = 0$ **b.** $\boxed{f'(x) = \ln(x)}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - x$

Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

2. Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2$ appartiennent à l'intervalle :

a. $\left]-\infty\,;\,\dfrac{\ln 3}{\ln(5,7)}\right]$ **b.** $\left]-\infty\,;\,\ln\left(\frac{0,5}{0,95}\right)\right]$ **c.** $\left]-\infty\,;\,\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\right]$ **d.** $\boxed{\left[\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}\,;\,+\infty\right[}$

$6 \times 0,95^n - 1 \leqslant 2 \iff 6 \times 0,95^n \leqslant 3 \iff 0,95^n \leqslant \dfrac{3}{6} \iff 0,95^n \leqslant 0,5$

$\iff \ln(0,95^n) \leqslant \ln(0,5) \iff n \times \ln(0,95) \leqslant \ln(0,5) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$ car $\ln(0,95) < 0$.

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de sa dérivée seconde.

a. concave sur $]-\infty\,;\,0]$ **b.** concave sur $[0\,;\,+\infty[$ **c.** convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ **d.** $\boxed{\text{convexe sur } [0\,;\,+\infty[}$

f est dérivable comme produit de fonctions dérivables $f = uv$ donc $f' = u'v + v'u$.
Pour tout réel x :
$u(x) = x$ et $u' = 1$
$v(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'x) = \mathrm{e}^x$
$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$
donc $f''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$ soit $f''(x) = (2 + x)\mathrm{e}^x$
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ $f''(x)$ est du signe de $2 + x$

x	$-\infty$ -2 $+\infty$	
signe de $f''(x)$	$-$	$+$

La fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,-2]$ et elle est convexe sur $[-2\,;\,+\infty[$.
Réponse d

4. Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de $0,8$. Les tirs sont supposés indépendants.
Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

a. 0,512 **b.** 2,4 **c.** 0,262 144 **d.** $\boxed{0{,}081\,92}$

À chaque tir il y a deux issues : il touche la cible, avec une probabilité de $0,8$, ou il ne la touche pas. L'expérience est répétée 6 fois et les tirs sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de fois où l'archer touche la cible.
La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,8$.
On veut détermine $P(X = 3)$: $P(X = 3) = \dbinom{6}{3} \times 0,8^3 \times (1 - 0,8)^{6-3} = 0{,}081\,92$

Exercice 2 **6 points**

1. **a.** En juin 2018, on peut estimer qu'il y aura $27500 - 150 = 27350$ étudiants dans cette université.

   b. À la rentrée de septembre 2018, il y aura à la suite de l'augmentation de 4 % :
   $1,04 \times 27350 = 28444$ étudiants.

2. Soit u_n le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2017 + n. En juin de l'année suivante (année $(n+1)$), 150 étudiants auront démissionné, pour un reste de $u_n - 150$. Puis à la rentrée de septembre de l'année $(n+1)$, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de 4 %, soit $1,04 \times (u_n - 150) = 1,04 \times u_n - 156$.
   Donc en septembre de l'année $(n+1)$ il y aura $1,04u_n - 156$ étudiants, soit pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = 1,04u_n - 156.$$

3. On complète les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3	Traitement :	n prend la valeur 0
L4		U prend la valeur 27 500
L5		Tant que $U \leqslant 33000$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,04 \times U - 156$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher $2017 + n$

4. **a.** On fait fonctionner cet algorithme pas à pas :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

   b. La valeur affichée en sortie de cet algorithme est : $n = 6$.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3900$.

   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3900 = 1,04 \times u_n - 156 - 3900 = 1,04 \times u_n - 4056 = 1,04\,(u_n - 3900)$
   $v_{n+1} = 1,04v_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison 1,04 et de premier terme
   $v_0 = 27500 - 3900 = 23600$.

   b. Donc pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 23600 \times 1,04^n$.
   De plus, On a $u_n = v_n + 3900$ donc $u_n = 3900 + 23600 \times 1,04^n$.

   c. La suite (v_n) est une suite géométrique de $q = 1,04$. $q > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est aussi égale à $+\infty$.
   Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.

Exercice 3 **5 points**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0,7; 6]; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{4-3} = -4$. Donc $f'(3) = -4$.
2. La fonction f est décroissante sur les intervalles [0,7 ; 1] et sur [2 ; 6] ; elle est croissante sur l'intervalle [1 ; 2].
   On peut donc en déduire le signe de f'sur l'intervalle [0,7 ; 6].

x	$0,7$		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

1. $f'(x) = (2x-2) \times \mathrm{e}^{-2x+6} + \left(x^2 - 2x + 1\right) \times (-2)\mathrm{e}^{-2x+6}) = \left(2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2\right) \times \mathrm{e}^{-2x+6}$
$= \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$

2. Pour tout $x \in [0,7\ ;\ 6]$, $\mathrm{e}^{-2x+6} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $-2x^2 + 6x - 4$.
$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4$, donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-6-2}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6+2}{-4} = 1$.
En utilisant le signe du trinôme du second degré, on établit le tableau de variations suivant :

x	$0,7$		1		2		6
$-2x^2+6x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	

3. a. La fonction f est concave sur les intervalles dans lesquels $f'' \leqslant 0$.
La ligne 3 donne la forme factorisée de la dérivée seconde f''. On en déduit que pour tout $x \in [\ 0,7\ ;\ 6\ ]$, $f''(x)$ a le même signe que le trinôme du second degré $2x^2 - 8x + 7$. La ligne 4 permet de déterminer les solutions de l'équation $f''(x) = 0$, ce qui nous donne les racines du trinôme. En utilisant le signe du trinôme du second degré, on en déduit que $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left[\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right]$.

b. Avec les mêmes lignes, on peut aussi en déduire que la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe pour les deux valeurs $x_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}$.
La courbe représentative de la fonction f admet donc deux points d'inflexion d'abscisses x_1 et x_2.

EXERCICE 4 **5 points**

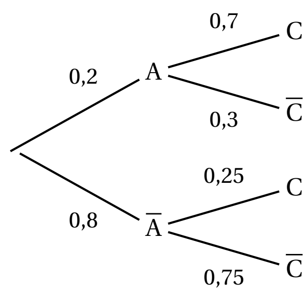
1. a. D'après l'énoncé $\boxed{p(\mathrm{A}) = 0,2}$ et $\boxed{p\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{C}}\right) = 0,6}$

b. On cherche la probabilité de $\overline{\mathrm{C}}$ sachant $\overline{\mathrm{A}}$:

$$p_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{C}}) = \frac{p\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{C}}\right)}{p(\overline{\mathrm{A}})} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

Si un client n'achète pas l'appareil photo en promotion, la probabilité qu'il n'achète pas non plus la carte mémoire en promotion est de $0,75$.

2. *Arbre*



3. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{C}) &= p(\mathrm{A}\cap \mathrm{C}) + p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap \mathrm{C}\right) \\ &= p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) + p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) \times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{C}) \\ &= 0,2\times 0,7 + 0,8 \times 0,25 \\ &= 0,34 \end{aligned}$$

La probabilité que le client achète la carte mémoire est de 0,34

4. On cherche la probabilité de A sachant C :

$$p_{\mathrm{C}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap \mathrm{C})}{p(\mathrm{C})} = \frac{0,2\times 0,7}{0,34} = \frac{7}{17} \approx 0,412$$

Si un client achète la carte mémoire, la probabilité qu'il achète l'appareil photo est de 0,75.

5. **a.** *Loi de probabilité*

Bénéfice par client en euros	0	4	30	34
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6	0,2	0,06	0,14

b. L'espérance vaut : $E = 0\times 0,6 + 4\times 0,2 + 30\times 0,06 + 34\times 0,14 = 7,36$.

Pour 100 clients entrant dans son magasin, le commerçant peut espérer un gain de 736 €.

6. L'évènement contraire de « au moins un de ces trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion » est « les trois clients achète l'appareil photo en promotion » donc

$$p = 1 - 0,2^3 = 0,992$$

La probabilité qu'au moins un de ces trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion est de 0,992.