1 **Partie A :**

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) z - 2i\sqrt{2}.$$

1/ Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2/ **a/** Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b/ En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i, \quad z_J = i\sqrt{2} \quad \text{et } z_K = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1/ Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2/ Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3/ Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
On fera un graphique que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1/ Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
Construire sur le graphique les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

3/ Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4/ Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$\left|f(z) - 8\right| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1 ; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5/ Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a/ Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b/ On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique en traçant ces droites.

6/ Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

3

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la fonction qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1/ On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2/ Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

3/ Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

4/ Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

5/ Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

4 *Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.*

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i, \quad b = -\sqrt{3} + i, \quad c = 1 + i\sqrt{3}, \quad d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{et} \quad e = -1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i$$

1/ **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.

2/ **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3/ **Affirmation 3** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + 1|$ est une droite.

4/ **Affirmation 4** Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de $(z - 4)\left(z^2 - 4z + 8\right) = 0$ sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

5/ **Affirmation 5** $\frac{iz}{z - 2}$ est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 4cm.

Placer les points A, B , C et D d'affixes respectives 1, -1 , i. et

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z+1}{z-\mathrm{i}}$ où z est un nombre complexe différent de 1.

1/ Déterminer par un calcul la forme algébrique de l'affixe $z_{A'}$ du point A' associé au point A. Placer le point A'.

2/ Déterminer à l'aide de la calculatrice le point associé à D.

3/ Montrer que pour tout $z \neq \mathrm{i}$, on a :

$$OM' = \frac{BM}{CM}$$

En déduire l'ensemble des point M' lorsque M décrit la médiatrice du segment [BC]

4/ Montrer que $\left|(z'-1)(z-\mathrm{i})\right| = \sqrt{2}$.
En déduire l'ensemble Γ' des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ de centre C et de rayon $\sqrt{2}$.
Construire Γ et Γ'.

6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n.$$

1/ Calculer z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

2/ Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3/ En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

4/ Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

5/ On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

a/ Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

b/ Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

6/ Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

7

On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1+\mathrm{i}$ et $Z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

Vérifier si les affirmations suivantes sont vraies.

1/ Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

2/ Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

3/ La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.

8

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_{\mathrm{A}} = 4+2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_{A}.

1/ Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_{\mathrm{A}}$.

a/ Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i}\times u_n$$

b/ Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n(-4-2\mathrm{i}).$$

2/ Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.