Cours Sainte Marie de Hann **2017-2018**
M. SARR **TS2**

Série : exponentielle

Exercice 1 :

Dans chaque cas calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f.

a) $f(x) = x - e^x$ b) $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 1 - 5e^{-x}$ c) $f(x) = \frac{e^x-2}{e^{2x}-1}$ d) $f(x) = e^x - xln|x|$

e) $f(x) = xexp\left(\frac{1}{x}\right)$ f) $f(x) = \frac{e^{x-1+lnx}-1}{x-1}$.

Exercice 2:

1) Trouver les primitives de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 10^x$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}exp\left(\frac{1}{x}\right)$ c) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ d) $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$ e) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x-1}$ g) $f(x) = \frac{3e^x}{(e^x-1)^2}$ h) $f(x) = xe^{-x}$

2) Déterminer les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur IR.

a) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x etF(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$

b) $f(x) = \frac{x-1}{e^x} etF(x) = \frac{ax+b}{e^x}$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$.

1) En étudiant la fonction g définie par $g(x) = e^x - 2x$, montrer que $D_f = IR$.

2) Calculer les limites aux borne de D_f.

3) Montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme $f'(x) = \frac{2h(x)}{(e^x-2x)^2}$ où h est une fonction à préciser.

4) Etudier les variations de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; 2[$.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$. Construire la courbe de f.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Etudier les variations de f.

b) Tracer (C) et donner une équation de la tangente (T) à (C) au point A de (C) d'ordonnée 4.

c) Montrer que $I(0; 1)$ est un centre de symétrie de (C).

2)a) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $K =]0; +\infty[$ est une bijection de K vers J que l'on précisera.

b) Trouver le coefficient directeur de la tangente (T') à la courbe (C') de g^{-1} au d'abscisse 4.

c) Vérifier que $\forall\ x \in J,\ g^{-1}(x) = ln\sqrt{\frac{x}{x-2}}$.

d) Tracer (C) et (C') dans le même repère.

Problème 1 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xln\left(\frac{x+1}{x}\right) & si\ x > 0 \\ f(x) = x(1 + e^{2-x}) & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

2) Soit $h(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$

a) Etudier les variations de h.

b) En déduire le signe h suivant les valeurs de x.

3-a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f.

b) Préciser la nature de la branche infinie à la courbe de f en $-\infty$.

4-a) Calculer $f'(x)\ sur\ ]-\infty; 0[$, en déduire son signe.

b) Calculer $f'(x)$ sur $]0;\ +\infty[$ puis étudier ses variations en déduire son signe.
c) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \ ]0;\ +\infty[$
a) Montrer que g réalise une bijection de I sur J à préciser.
b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g, montrer que g^{-1} est dérivable en $ln2$ et calcule $(g^{-1})'(ln2)$.
c) tracer la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

<u>Problème 2 :</u>

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x + ln\left(1 + e^{1/x}\right) \quad si \quad x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[\\ f(0) = 0 \\ f(x) = (2+x)e^{2-x} \quad si \ \ x \in [2;\ +\infty[\end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
2) Déterminer les branches infinies de la courbe de f.
Préciser la position de C_f par rapport à son asymptote oblique.
3)On pose $u(x) = 3 + \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) e^{1/x};\ x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[$
a) Calculer les limites aux borne de D_u.
b) Etudier les variations de u.
c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\in]0{,}52;\ \ 0{,}54[$, en déduire le signe de $u(x)$.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer la courbe de f.
6) Soit $\omega \in]2; +\infty[$, on note $A(\omega)$ l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 2 \ \ et \ x = \omega$. Calculer $A(\omega)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} A(\omega)$.

<u>Problème 3 :</u>

Partie A : On pose $g(x) = (1-x)e^{-x} - 1$.
Etudier les variations de g en déduire le signe de $g(x)$.
Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + xe^{-x} \quad si \quad x \leq 0 \\ f(x) = ln|x^2 - 1| \quad si \quad x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminer D_f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.
3) Etudier les variations de f.
4) Etudier l'intersection de C_f avec les axes des coordonnées
5) Montrer qu'il existe un unique point E de C_f en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation : $y = -x$.
Donner une équation de cette tangente.
Partie C : Soit h la restriction de f sur $I = [0; 1[$
1) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition J.
2) h^{-1} est elle dérivable en 0 ?
3) Donner une équation de la tangente à $C_{h^{-1}}$ au point d'abscisse $ln\frac{3}{4}$.
5) Expliciter $h^{-1}(x)$ $pour\ x \in J$.
6) Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$. Unité 2cm.