



Graphes

Terminale ES

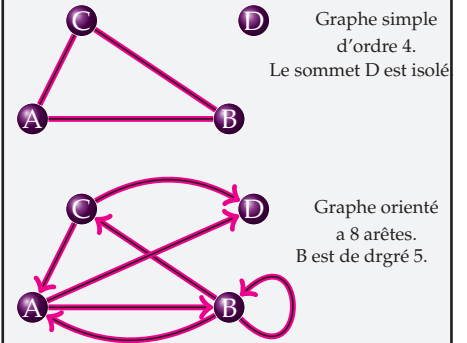
Fiche 1



Vocabulaire de base

- Un **graphe** est un ensemble de sommets et d'arêtes qui relient deux sommets. Le nombre de sommets est l'**ordre** du graphe.
- Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.
- Un sommet est **isolé** lorsque aucune arête ne le relie aux autres sommets.
- Un **graphe simple** est un graphe sans boucle tel que, entre deux sommets, il y ait au plus une arête. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.
- Un **graphe orienté** est un graphe tel que ses arêtes ont un sens de parcours souvent représenté par une flèche.
- Le **degré** d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Graphe simple / graphe orienté

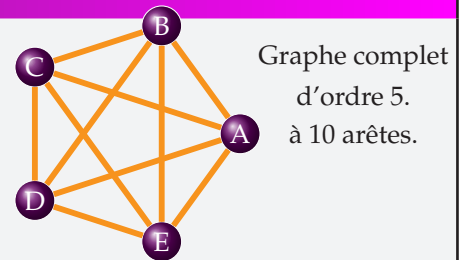


Somme des degrés

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égal au double du nombre total d'arêtes.

Graphe complet

Un **graphe complet** est un graphe dont tous les sommets sont reliés deux à deux par une unique arête. Dans le graphe complet d'ordre n , le degré de chacun des sommets est $n - 1$ et le nombre d'arêtes est : $\frac{n(n-1)}{2}$.



Chaîne et cycle eulériens

Définitions

- Dans un graphe une **chaîne ou chemin** est une suite d'arêtes mises bout à bout. La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes constituant la chaîne.
- Dans le cas, où les arêtes ont été prises **une seule fois** et que les extrémités coïncident, la chaîne est un **cycle**.
- La **distance entre deux sommets** d'un graphe connexe est la longueur de la chaîne qui les relie, ayant le moins d'arêtes.
- Un **graphe est connexe** lorsque, pour chaque **paire** de sommets, il existe au moins une chaîne reliant les deux sommets.

Théorème d'Euler

Définitions

- Une **chaîne eulérienne** est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, chacune prise une seule fois.
- Si, de plus, la chaîne revient à son sommet d'origine, la chaîne eulérienne est un **cycle eulérien**.

Théorème d'Euler

- Un graphe admet un cycle eulérien si, et seulement si, ce graphe est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.
- Dans le cas d'un graphe connexe ayant seulement deux sommets A et B de degré impair, on obtient une chaîne eulérienne entre A et B.

Matrice d'adjacence d'un graphe

La **matrice d'adjacence d'un graphe** d'ordre n (resp. graphe orienté d'ordre n) est la matrice carrée A de taille $n \times n$, dont l'élément a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. (resp. allant du sommet i vers le sommet j).

Théorème : L'élément m_{ij} de la matrice A^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j .

Remarques :

- Dans un graphe non orienté, la somme des termes d'une ligne (ou d'une colonne) de la matrice d'adjacence est égale au degré du sommet associé à la ligne (ou colonne).
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à la première diagonale.
- La matrice composée de 1, sauf la diagonale composée de 0, est celle d'un graphe complet.
- La somme des éléments de la matrice d'un graphe orienté est égale au nombre d'arêtes.