Cours Sainte Marie de Hann **2017-2018**
M. SARR **TS2**

Fonctions numériques

Exercice 0.

a) Dans chaque cas déterminer le domaine de définition D_f de f puis calculer les limites aux bornes de D_f.

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$ 4) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2}}{x-2}$; 5) $f(x)=\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{4x-3}-x}$

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$; 6) $f(x)=\frac{\sqrt{|2x-3|}-\sqrt{4x^2+2x}}{x(x-2)}$; 7) $f(x)=\frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}$; 8) $f(x)=\frac{|2x+3|}{\sqrt{x^2+3x+4}-x}$

b) Calculer la limite de f en x_0

1) $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$, $x_0=0$ 3) $f(x)=\frac{\pi(cos^2x-cosx)}{2cos^2x-3cosx+1}$, $x_0=0$; 4) $f(x)=\frac{tan3x}{sin2x}$, $x_0=0$

2) $f(x)=\frac{2sinx-1}{6x-\pi}$, $x_0=\frac{\pi}{6}$; 5) $f(x)=\frac{2x+sinx}{x}$, $x_0=\mp\infty$ 6) $f(x)=x-cosx$, $x_0\mp\infty$.

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^3+x^2-4}{x^2-4}$

1) calculer les limites aux bornes du domaine de définition de *f.*

2) Déterminer les asymptotes à la courbe de *f.*

3) Etudier les variations de *f.*

4) Soit (D) l'asymptote oblique à (C_f), étudier la position relative de (D) et (C_f).

5) Soit I le point d'intersection de (D) et (C_f), monter que I est centre de symétrie de (C_f).

6) Tracer (C_f) et la tangente à(C_f) en I.

Exercice 2 :

1) On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x)=2x^3-3x^2-1$
a) Etudier les variations de P.
b) Montrer que l'équation $P(x)=0$, admet une unique solution α et que $\alpha\in]1{,}6;1{,}7[$.
c) Déterminer le signe de $P(x)$ sur IR .

2) Soit f la fonction définie par, $f(x)=\frac{1-x}{1+x^3}$. On désigne par (C) la courbe de f .
a) Etudier les variations de f .
b) Donner une équation de la tangent à (C) au point d'abscisse 0. Montrer que le point E(0 ; 1) est un point d'inflexion de (C).
c) Etudier la position relative de (C) et de sa tangente au point d'abscisse 1.
d) Tracer (C) .

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=x-\sqrt{|x^2-1|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f.*
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et en -1.
3) Déterminer les asymptotes de la courbe de *f.*
4) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de *f.*
5) Etudier les points d'intersections de la courbe de f avec les axes des coordonnées. Tracer la courbe de *f.* (repère orthonormé unité 2 cm)
6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq 0$
7) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

8) Soit g la restriction de *f* sur l'intervalle $I = [1;\ +\infty[$
a) Montrer que g réalise une bijection de I vers J à préciser.
b) Résoudre l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$
c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et calculer $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.
d) Construire (Cg^{-1}) et (C_g) dans le repère précédent.

Exercice 4 :

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

1) Montrer que *f* réalise une bijection de $[0;\ +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J
3) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
4) Expliciter f^{-1} . Retrouver le résultat de la question 2).

Exercice 5 :

On considère la fonction *f* définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} & si \quad x > 1 \\ f(x) = \dfrac{-4x^3 + 4x - 1}{2x^2} & si\ x \leq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f.

3.a) Déterminer la droite (D) asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et la droite (D') asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) sur $]-\infty; 1[$ et la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D') sur $]1;\ +\infty[$.
4) On pose $u(x) = -2x^3 - 2x + 1$
a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; 1[$.
b) En déduire le signe u sur IR.
5.a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de *f* puis calculer $f'(x)$.
b) Pour $x < 1\ et\ x \neq 0$, exprimer $f'(x)$en fonction de $u(x)$ et en déduire le signe $f'(x)\ \ si\ x < 1\ et\ x \neq 0$
c) Etablir le tableau de variation de f.
6) On note g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 0[$
a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on préciser.
b) On pose $v(x) = -4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, calculer $v\left(\frac{1}{2}\right)$
c) Soit g^{-1} la réciproque de g. Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$
d) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
7) Tracer $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_{g^{-1}}$. Dans un même repère.

Exercice 6.

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{3}sin3x - sinx$.

1) Etudier la périodicité et la parité de la fonction *f*.
2) Justifier le choix de l'intervalle $I = [0;\ \pi]$ comme intervalle d'étude.
3) Démontrer que, pour tout réel x: $f'(x) = -4sin^2xcosx$. En déduire les variations de *f*.
4) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.

Exercice7

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = cos4x + 2sin2x$

1) Etudier la périodicité et la parité de la fonction f.
2) Justifier le choix de l'intervalle $I = [0;\ \pi]$ comme intervalle d'étude.

3) Démontrer que, pour tout réel x: $f'(x) = 4cos2x(1 - 2sin2x)$
4) Déterminer le signe de f' sur I. En déduire le tableau de variation de f.
5) Montrer que la droite (D): $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$
6) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.

Exercice 8

La fonction numérique f définie par : $f(x) = cosx + \frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}cos3x$

1) Justifier le choix de l'intervalle $I = [0;\ \pi]$ comme intervalle d'étude.
2) Démontrer que, pour tout réel x: $f'(x) = -sin2x(1 + 2cosx)$
3) Résoudre dans $[0;\ \pi]$,l'équation $f'^{(x)} = 0$. En déduire les variations de f sur $[0;\ \pi]$
4) Tracer la courbe de f dans $[-\pi;\ \pi]$

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ et $g(x) = \frac{x+E(x)}{x}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1) Sans expliciter $fof(x)$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$
2) Déterminer un encadre de $g(x)\ sur\ ]0;\ +\infty[$, en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
3) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1}$

Exercice 10:

Soit la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 - \dfrac{2x}{x^2+1} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = x - 1 - 3\sqrt{x^2 - 1} & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

1. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de *f*
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 1.
3. Déterminer les asymptotes de la courbe de f.
4. Préciser la position relative de la courbe de *f* par rapport à ses asymptotes.
5. Calculer la fonction dérivée de *f* dans les intervalles où elle est dérivable.
6. Etablir le tableau de variation de *f.*
7. Tracer la courbe de *f*
8. Soit *g* la restriction de *f* à l'intervalle $I =]-\infty; 1]$

a) Montrer que *g* est bijective de I vers J à préciser.
b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse 2 .
c) Tracer la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} & si\ \ x > 1 \\ f(x) = \sqrt{|x^2 - x|} & si\ \ x \leq 1 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et en 0, puis interpréter graphiquement les résultats.
2) Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue.
3) Déterminer les branches infinies de la courbe de f.
4) Calculer la fonction dérivée de f dans les intervalles où f est dérivables.
5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Soit h la restriction de f à $I =]-\infty;\ 0[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser

b) La fonction h^{-1} est elle dérivable sur J. Calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$

c) Expliciter $h^{-1}(x)$.

Exercice 1 2: