MANUEL LIBRE

MATHS 1re S

STATISTIQUES PROBABILITÉS

ANALYSE

GÉOMÉTRIE

Environnement numérique et relectures réalisés par l'association Sésamath

MAGNARD

GÉOMÉTRIE

1

Vecteurs et droites du plan

Connaissances nécessaires à ce chapitre

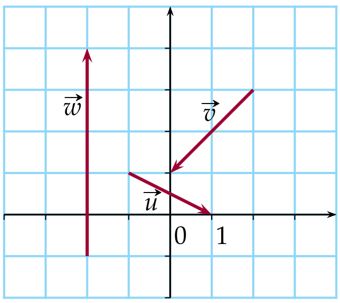
- Lire des coordonnées de vecteurs
- Calculer des coordonnées de vecteurs
- Effectuer des opérations sur les vecteurs
- Utiliser la relation de Chasles

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1

1) Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans le repère ci-dessous.



2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

2 Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-10{,}5\\3\end{pmatrix}$ et les points $A(-1\,;\,2)$, $B(6\,;\,0)$ et $C(5\,;\,-3)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $-3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}-2\vec{u}$.

3) Démontrer que $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

3 On considère la figure ci-dessous où $ABDGFE$ et $DGLKJI$ sont des hexagones réguliers de centre respectif C et H.

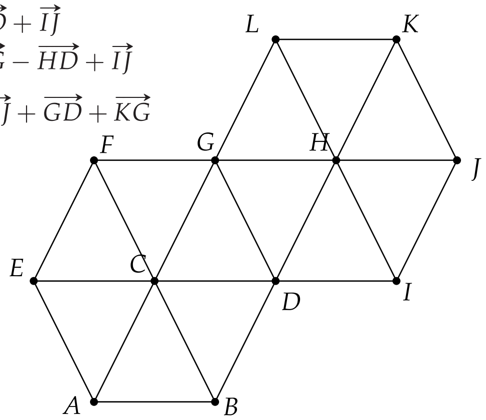
À l'aide de points de la figure, écrire ces sommes de vecteurs sous la forme d'un seul vecteur.

1) $\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HC}$

2) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{IJ}$

3) $\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{IJ}$

4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{FJ}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{KG}$



4 À l'aide de la relation de Chasles, simplifier les expressions suivantes :

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 À la recherche du point inconnu

Dans un repère, on considère les points $A(3\,;\,-1)$, $B(4\,;\,1)$ et $C(5\,;\,9)$.
Déterminer les coordonnées du point :

1) E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$
2) F tel que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
3) G tel que $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
4) H tel que $2\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}$

ACTIVITÉ 2 Des points, des x et des y

INFO

Partie 1 : Points sous conditions

Dans un repère, on considère les points $A(-1\,;\,1)$, $B(5\,;\,3)$ et $C(-5\,;\,-1)$.

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2) Déterminer le réel x pour que le point $D(x\,;\,11)$ appartienne à la droite (AB).

3) **a)** Soit $M(x\,;\,y)$. Écrire une égalité portant sur x et y pour que M appartienne à (AB).

b) En utilisant l'égalité précédente, déterminer pour chacun des points $E(3\,;\,4)$ et $F(2\,;\,2)$ s'il appartient ou non à (AB).

Partie 2 : Un ensemble très cartésien

On considère maintenant l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que l'équation :

$$x + 3y + 1 = 0 \qquad (\mathbf{E})$$

soit vérifiée.

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

2) **a)** Les coordonnées du point $G(3\,;\,-1)$ vérifient-elles l'équation $(\mathbf{E})$?

b) Si oui, placer le point G dans le repère du logiciel en vert. Sinon, le placer en rouge.
On pourra modifier la couleur d'un point avec un clic droit sur le point, puis utiliser le menu Propriétés.

3) Faire de même avec les points $H(2\,;\,-1)$, $I(-2\,;\,2)$, $J(4\,;\,1)$, $K(-1\,;\,0)$, $L(-4\,;\,1)$, $N(4\,;\,-2)$ et $P(0\,;\,-0{,}3)$.

4) Quelle conjecture peut-on faire ?

5) Démontrer cette conjecture.

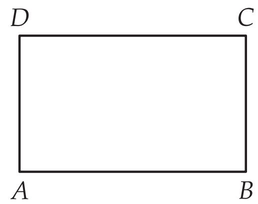
ACTIVITÉ 3 Dans un état de décomposition avancé

On considère un rectangle $ABCD$ et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.

1) Reproduire la figure ci-contre et y placer les points E et F.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et d'un autre vecteur judicieusement choisi. *On pourra prendre en compte la manière dont sont définis les points E et F.*

3) En déduire que les points E, F et C sont alignés.



Dans tout ce chapitre, les coordonnées sont données dans un repère du plan.

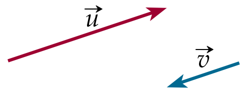
1. Colinéarité de deux vecteurs

DÉFINITION

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple

Ci-contre, $\vec{u} = -2\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



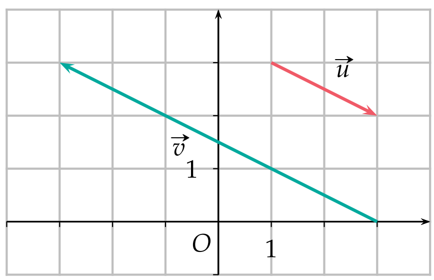
REMARQUE : Comme $0\vec{u} = \vec{0}$, on considère que le **vecteur nul** est colinéaire à tous les autres vecteurs.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs **coordonnées sont proportionnelles**.
Autrement dit, ils sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Comme on a $2 \times 3 - (-6) \times (-1) = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



PREUVE La propriété est évidente si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul.
Montrons qu'elle est également vraie sinon.

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires.

  Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$. Il en résulte que :

  $xy' - x'y = (kx') \times y' - x' \times (ky') = kx'y' - kx'y' = 0$.
- Réciproquement, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls tels que $xy' - x'y = 0$.

  On a alors $xy' = x'y$, autrement dit les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont proportionnelles aux coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: si l'on note k le coefficient de proportionnalité, on obtient $x = kx'$ et $y = ky'$ c'est-à-dire $\vec{u} = k\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ

On considère quatre points A, B, C et D avec A distinct de B et C distinct de D.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

MÉTHODE 1 Montrer que deux droites sont parallèles

► Ex. 8 p. 177

Exercice d'application

On considère quatre points $A(1\,;\,4)$, $B(3\,;\,-2)$, $C(-1\,;\,-2)$ et $D(-2\,;\,1)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où :
$2 \times 3 - (-1) \times (-6) = 6 - 6 = 0$.
On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, puis que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

PROPRIÉTÉ : Corollaire

Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

MÉTHODE 2 Déterminer si des points sont alignés

► Ex. 10 p. 177

Exercice d'application

On considère trois points $A(6\,;\,-1)$, $B(0\,;\,1)$ et $C(-3\,;\,2)$.
Les trois points A, B et C sont-ils alignés ?

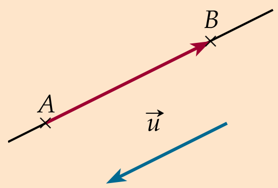
Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $-6 \times 3 - (-9) \times 2 = -18 + 18 = 0$.
On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, puis que les points A, B et C sont alignés.

2. Équations cartésiennes d'une droite

DÉFINITION

Un vecteur $\vec{u}$ non nul est un **vecteur directeur** de la droite (AB) si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Autrement dit, un vecteur non nul est appelé vecteur directeur d'une droite lorsqu'il a la même **direction** que cette droite.



Remarque : Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

PROPRIÉTÉ

Deux droites sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

Exemple

Soit $A(1\,;\,2)$, $B(5\,;\,4)$ et $C(-1\,;\,6)$.
La droite (AB) est-elle parallèle à d, la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$?

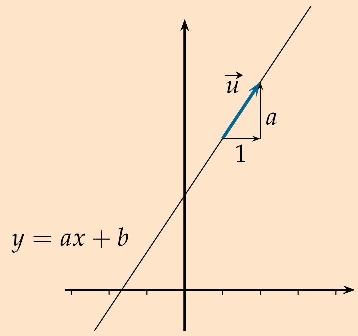
Correction

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$ puisque $\overrightarrow{AB}=-2\vec{u}$.

Comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est directeur de la droite (AB) et le vecteur $\vec{u}$ est directeur de la droite d, les droites (AB) et d sont parallèles.

PROPRIÉTÉ

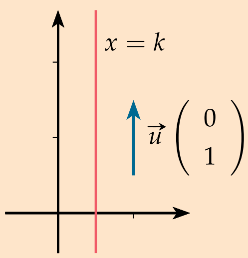
Soit a et b deux réels.
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y=ax+b$.



PREUVE En prenant $x=0$, on trouve que le point $A(0\,;\,b)$ appartient à la droite d'équation $y=ax+b$. De même, avec $x=1$, on trouve que le point $B(1\,;\,a+b)$ appartient à cette droite. Ainsi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\a+b-b\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y=ax+b$.

PROPRIÉTÉ

Soit k un réel.
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $x=k$.



PREUVE $A(k\,;\,0)$ et $B(k\,;\,1)$ sont deux points de la droite d'équation $x=k$.
Ainsi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $x=k$.

Cours - Méthodes

PROPRIÉTÉ

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A.
Un point M appartient à d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

PREUVE Pour $M \neq A$:
$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

PROPRIÉTÉ

L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ signifie que a et b ne peuvent pas être nuls simultanément.

PREUVE Appelons D cet ensemble de points.

- Montrons d'abord que D n'est pas vide c'est-à-dire qu'il contient bien au moins un point. Pour cela, on procède par disjonction des cas.
  - Supposons d'abord que $a \neq 0$.
    On considère alors le point $A\left(-\frac{c}{a}\ ;\ 0\right)$ et on a :
    $ax_A + by_A + c = a \times \left(-\frac{c}{a}\right) + b \times 0 + c = -c + c = 0$ donc A appartient à l'ensemble D.
  - Supposons maintenant que $a = 0$.
    On a alors $b \neq 0$ (puisque $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$) et on montre de même que le point $A\left(0\ ;\ -\frac{c}{b}\right)$ appartient à D.

  Dans les deux cas, il existe un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ qui appartient à D, c'est-à-dire tel que $ax_A + by_A + c = 0$.
- Soit $M(x\ ;\ y) \in D$, on a alors $ax + by + c = 0$.
  Des égalités $ax_A + by_A + c = 0$ et $ax + by + c = 0$, on déduit par soustraction que : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
  Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$, en posant $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, on obtient :
  $M \in D \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a - (-b) \times (y - y_A) = 0$:
  $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, autrement dit M appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ passant par A.

PROPRIÉTÉ : Réciproque

Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

PREUVE On considère une droite d du plan, $A(x_A\,;\,y_A)$ un point de d et $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d. Un point $M(x\,;\,y)$ appartient à la droite d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
Cela revient à $(x - x_A) \times q - p \times (y - y_A) = 0$ soit $qx - py - qx_A + py_A = 0$. On a donc bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = q$, $b = -p$ et $c = -qx_A + py_A$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

DÉFINITION

Une équation d'une droite d de la forme $ax + by + c = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite d.

Remarque : Une droite admet plusieurs équations cartésiennes mais au plus une seule équation de la forme $y = ax + b$, appelée **équation réduite** de la droite.

MÉTHODE 3 Déterminer une équation cartésienne de droite

► Ex. 27 p. 179

Exercice d'application

Déterminer une équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $A(-1\,;\,4)$.

Correction

Soit $M(x\,;\,y)$, on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 4 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 4 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow (x+1) \times 2 - (-3) \times (y - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2 - (-3y + 12) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 3y - 10 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de d est donc $2x + 3y - 10 = 0$.

MÉTHODE 4 Déterminer un vecteur directeur et un point d'une droite

► Ex. 28 p. 179

Exercice d'application

On considère la droite d d'équation $x - 3y + 1 = 0$.

1) Déterminer un vecteur directeur de la droite d.
2) Déterminer les coordonnées d'un point de d.

Correction

1) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} -(-3) \\ 1 \end{pmatrix}$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2) On peut fixer une valeur pour une coordonnée et choisir ensuite l'autre pour que l'équation soit vérifiée.
   Ainsi, si on fixe $y = 0$ alors $x - 3 \times 0 + 1 = 0$ donc $x = -1$.
   Le point $A(-1\,;\,0)$ est donc un point de d.

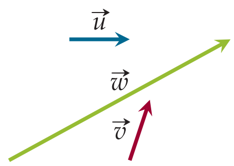
3. Décomposition d'un vecteur

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls et non colinéaires. Tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont des réels.

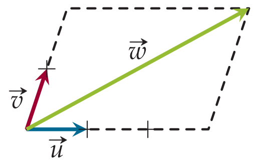
Exemple

Décomposer $\vec{w}$ selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Correction

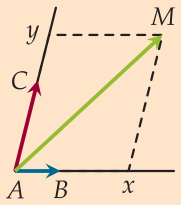
On trace des représentants de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de même origine et on construit un parallélogramme comme ci-dessous :



Graphiquement, on lit $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

PROPRIÉTÉ : Application aux repères du plan

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.
Pour tout point M du plan, il existe un **unique couple** de réels $(x\,;\,y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
Le triplet $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ définit donc un **repère** du plan et le couple $(x\,;\,y)$ est appelé le couple de **coordonnées** de M dans ce repère.



4. Norme d'un vecteur

DÉFINITION

- Soit A et B deux points. La **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, est définie par $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
  La **norme** de $\vec{u}$ est alors définie par $\|\vec{u}\| = AB$.

PROPRIÉTÉ

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Pour tout réel k, on a $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

REMARQUE : De $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on retrouve $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$ dans un repère orthonormé.

Exemple Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé. On a alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Dans tous les exercices, les coordonnées sont données dans un repère du plan.

Activités mentales

1 Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}-14\\28\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$

2 Déterminer une équation de la droite d passant par $A(0\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

3 Déterminer un vecteur directeur de la droite d d'équation $y-3x=4$.

4 Donner l'équation réduite des droites suivantes.

1) d d'équation $x-y+2=0$

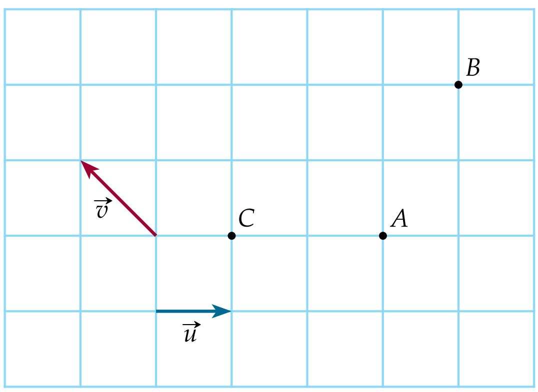
2) d' d'équation $6x+2y=1$

5 On considère la droite d d'équation cartésienne $-2x+3y-4=0$.

1) Le point $A(-1\,;\,2)$ appartient-il à la droite d ?

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d avec l'axe des abscisses.

6 On considère le graphique ci-dessous.



Donner la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ selon les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Colinéarité et parallélisme

7 Déterminer si les couples de vecteurs suivants sont colinéaires.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-11\\5\end{pmatrix}$

2) $\vec{a}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}\frac{15}{4}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

3) $\vec{r}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}-2\\-3\sqrt{2}\end{pmatrix}$

4) $\vec{a}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{12}\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{14}{5}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$

5) $\vec{b}\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\-4\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{20}\\-\sqrt{24}\end{pmatrix}$

8 ► MÉTHODE 1 p. 172

Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1) $A(3\,;\,-2)$, $B(-1\,;\,-1)$, $C(-3\,;\,2)$ et $D(1\,;\,3)$

2) $A(-9\,;\,-2)$, $B(1\,;\,3)$, $C(3\,;\,-2)$ et $D(1\,;\,-3)$

3) $A(-1\,;\,2)$, $B(-1\,;\,3)$, $C(3\,;\,2)$ et $D(4\,;\,2)$

4) $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}\,;\,3\right)$, $C\left(\frac{9}{5}\,;\,-1\right)$ et $D\left(-\frac{6}{5}\,;\,-2\right)$

5) $A(14\,;\,4)$, $B(-18\,;\,-12)$, $C(2\,;\,4)$ et $D(-18\,;\,-4)$

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites (CD) et (EH) sont parallèles.

1) $E(2\,;\,6)$, $H(10\,;\,6)$, $C(1\,;\,1)$ et $D(9\,;\,-1)$

2) $E(-3\,;\,10)$, $H(-3\,;\,2)$, $C(4\,;\,7)$ et $D(4\,;\,8)$

3) $E(2\,;\,3)$, $H\left(3\,;\,\frac{9}{2}\right)$, $C(-3\,;\,2)$ et $D(-1\,;\,5)$

4) $E\left(-\frac{2}{3}\,;\,-\frac{3}{4}\right)$, $H(1\,;\,-2)$, $C(1\,;\,-1)$ et $D(9\,;\,-7)$

5) $E\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $H\left(0\,;\,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $C(\sqrt{3}\,;\,\sqrt{2})$ et $D(-\sqrt{3}\,;\,0)$

10 ► MÉTHODE 2 p. 172

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés.

1) $A(-9\,;\,4)$, $B(1\,;\,-1)$ et $C(4\,;\,-2)$

2) $A(-4\,;\,0)$, $B(-2\,;\,1)$ et $C\left(3\,;\,\frac{7}{2}\right)$

3) $A(-4\,;\,4)$, $B(-4\,;\,6)$ et $C(-3\,;\,2)$

S'entraîner

11 Dans chacun des cas, déterminer si les points suivants sont alignés.

1) $F\left(\frac{2}{3} ; 1\right)$, $G\left(-2 ; \frac{1}{3}\right)$ et $H(5 ; 2)$

2) $B(0 ; 0)$, $C(\sqrt{2} ; \sqrt{6})$ et $D(4 ; 4\sqrt{3})$

3) $E(1 ; 2)$, $F(-3 ; 8{,}28)$ et $G(3 ; 2-\pi)$

4) $A(-6 ; 4)$, $B(\sqrt{2}-2 ; -\sqrt{2})$ et $D(\sqrt{5}-2 ; -\sqrt{5})$

5) $C(\pi ; \pi)$, $D(1 ; 2-\pi)$ et $H(\pi-4 ; \pi-2)$

12 Soit $A(-3 ; 1)$, $B(1 ; 2)$ et $C(4 ; -1)$.

Trouver trois couples de coordonnées possibles pour D tel que $ABCD$ soit un trapèze.

13 Indiquer, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

2) Si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Si $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{FG}$, alors E est un point de $[FG]$.

4) Pour tout réel x, $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{18} \\ 3x \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

14 Soit x un réel.

Déterminer toutes les valeurs de x possibles pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}$

4) $\vec{u}\begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$

15 On considère les points $A(7 ; -1)$ et $B(-7 ; 4)$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère.

16 ALGO

Écrire un algorithme qui :

- demande en entrée les coordonnées x_A, y_A, x_B, y_B, x_C et y_C de trois points dans un repère du plan ;
- indique en sortie s'ils sont alignés ou non.

17 A, B et C sont trois points du plan.
Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1) $\vec{u} = 4\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = -12\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2) $\vec{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + \frac{15}{4}\overrightarrow{AC}$

3) $\vec{u} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{15}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

18 On considère deux points A et B et un point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel.
Déterminer la ou les valeur(s) de k telles que :

1) A soit le milieu de $[MB]$;

2) M soit sur le cercle de centre B et de rayon $2AB$;

3) M appartienne à $[BA)$.

19 On considère deux points A et B dans le plan et le point R tel que :

$$2\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{AB}.$$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2) Que peut-on en déduire concernant les points A, B et R ?

20 On considère un triangle quelconque ABC.

1) Faire une figure.

2) On considère le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

a) En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de vecteurs formés des points A, B et C uniquement.

b) Que peut-on dire des points A, C et M ?

c) Placer le point M sur la figure.

21 ABC est un triangle. D est le point tel que :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.$$

Sans essayer de faire une figure, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

22 A, B et C sont trois points distincts non alignés du plan. M est le point tel que :

$$2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CA}.$$

1) Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

2) Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère $AMBC$?

Équations cartésiennes de droites

23 On considère les droites d et d' d'équation respective $x - 4y - 5 = 0$ et $-2x + 3y = 4$.

1) a) Le point $A(1\,;\,-1)$ appartient-il à la droite d ?

b) Déterminer les coordonnées du point E d'abscisse 5 appartenant à la droite d.

c) Tracer la droite d dans un repère.

2) Tracer dans le même repère la droite d'.

24 On considère les droites d et d' d'équation respective $2x + y + 3 = 0$ et $3x - y + 1 = 0$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes du repère.

b) Tracer la droite d.

2) a) Trouver deux points à coordonnées entières qui appartiennent à d'.

b) Tracer la droite d' dans le repère précédent.

25 Tracer dans un repère les droites d et d' d'équation respective $4x - y + 5 = 0$ et $-x + 1{,}5y - 3{,}5 = 0$.

26 **Points inconnus**

On considère un paramètre réel m.

1) Soit d la droite d'équation $2x - 5y + 2 = 0$.
Trouver les éventuelles valeurs de m telles que $A \in d$.

a) $A\left(m\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)$ **c)** $A(5m\,;\,2m+1)$

b) $A(0\,;\,m^2)$ **d)** $A(m^2 - 1\,;\,m)$

2) Reprendre la question précédente avec la droite d' d'équation $4x + 5 = 0$.

27 ► MÉTHODE 3 p. 175

Déterminer une équation cartésienne de la droite :

1) d_1 passant par $A(4\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

2) d_2 passant par $B(0\,;\,0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

3) d_3 passant par $C(0\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{r}\begin{pmatrix}1/3\\-1/2\end{pmatrix}$

4) d_4 passant par $D(1\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{s}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

28 ► MÉTHODE 4 p. 175

Donner un vecteur directeur et un point de la droite d d'équation.

1) $-x + y = 3$ **4)** $-2x + 1 = 0$

2) $12x + 25y - 7 = 0$ **5)** $y = 2x - 5$

3) $y - 7x = -8$ **6)** $\dfrac{x}{3} + y - 1 = 0$

29 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans les cas suivants :

1) $A(1\,;\,2)$ et $B(0\,;\,3)$ **3)** $A(0\,;\,1)$ et $B(1\,;\,0)$

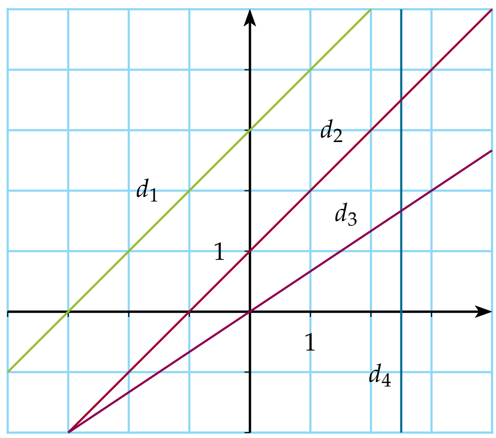
2) $A(0\,;\,5)$ et $B(-1\,;\,5)$ **4)** $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\right)$ et $B(2\,;\,-4)$

30 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points :

1) $C(2\,;\,0)$ et $D(4\,;\,-3)$ **3)** $F\left(\dfrac{1}{3}\,;\,3\right)$ et $R\left(2\,;\,-\dfrac{1}{5}\right)$

2) $E(2\,;\,3)$ et $H(2\,;\,-6)$ **4)** $L\left(\dfrac{1}{3}\,;\,5\right)$ et $N\left(\dfrac{4}{3}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$

31 On considère les quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4 tracées dans le repère ci-dessous.



Associer chaque droite à son équation.

1) $-x + y - 1 = 0$ **3)** $2x - 2y + 6 = 0$

2) $2x - 5 = 0$ **4)** $2x - 3y = 0$

32 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites d et d' sont parallèles.

1) $d : -x + y - 3 = 0$ et $d' : 3x + y + 1 = 0$

2) $d : 3x + 2y - 1 = 0$ et $d' : -6x - 4y - 1 = 0$

3) $d : \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 4$ et $d' : -2y + 3x = 0$

4) $d : x + 4 = 0$ et $d' : y - 1 + x = 0$

S’entraîner

33 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite d' parallèle à d passant par A.

1) $A(2\,;\,1)$ et d d’équation $-3x+y=0$

2) $A(-1\,;\,3)$ et d d’équation $-x-2y+1=0$

3) $A(1\,;\,1)$ et d d’équation $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+4=0$

4) $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ et d d’équation $-x+y-2=0$

34 Soit d la droite d’équation $3x-2y+1=0$.
Pour chacune des droites suivantes, indiquer si elle est parallèle, sécante ou confondue avec la droite d.

1) d_1 d’équation $2x-3y+1=0$

2) d_2 d’équation $6y-9x+1=0$

3) d_3 d’équation $\dfrac{7}{2}x-7y+21=0$

4) d_4 d’équation $1{,}5x-y=-0{,}5$

35 On considère les points $A(3\,;\,5)$, $B(6\,;\,4)$ et $C(3\,;\,-2)$ et la droite d d’équation $x-5y+7=0$.

1) La droite d et la droite (AB) sont-elles parallèles ?

2) Déterminer une équation de la droite d' parallèle à d passant par C.

3) On s’intéresse à un point D tel que $ABCD$ soit un trapèze de base $[BC]$.

a) Donner l’équation de la droite contenant D.

b) Tous les points de cette droite conviennent-ils ?

36 **Droites et systèmes**

1) a) Résoudre le système :

$$\begin{cases} 4x+11y-9=0 \\ 3x-0,5y+2=0 \end{cases}.$$

b) Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente.

2) Même question avec le système :

$$\begin{cases} 4x-6y+1=0 \\ 14x-22=21y \end{cases}.$$

37 On considère les droites d_1, d_2 et d_3 d’équation respective :

- $d_1 : 2x+y+4=0$
- $d_3 : 3x-y+9=0$
- $d_2 : -x+2y-5=0$

1) a) Démontrer que d_1 et d_2 sont sécantes.

b) Déterminer les coordonnées de A, point d’intersection de d_1 et d_2.

2) Montrer que d_1, d_2 et d_3 sont concourantes.

38 On considère les points $A(-1\,;\,1)$ et $B(5\,;\,2)$ et la droite d d’équation $5x+4y-16=0$.

1) Démontrer que les droites d et (AB) sont sécantes en un point C.

2) Déterminer les coordonnées de C.

39 Soit m un réel. On considère la famille de droites $\mathcal{D}_m$ d’équation :

$$x+(m-1)y-m=0.$$

1) Tracer dans un repère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_{-1}$.

2) Démontrer que pour tout réel m, la droite $\mathcal{D}_m$ passe par un point A dont on donnera les coordonnées.

3) a) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ passe par le point $B(3\,;\,0)$?

b) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l’axe des ordonnées ?

c) Peut-on trouver m tel que la droite $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l’axe des abscisses ?

40 On considère les droites d_1 et d_2 d’équation respective $-x+2y=0$ et $2x+y-5=0$.
Trouver une droite d_3, dont on donnera une équation cartésienne, telle que d_1, d_2 et d_3 soient concourantes.

41 On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel et le point $A(-2\,;\,0)$.
Soit d_m la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1) Déterminer une équation de d_m.

2) a) Peut-on trouver m tel que le point $B(3\,;\,2)$ appartienne à d_m ?

b) Peut-on trouver m tel que d_m soit parallèle à la droite D d’équation $-5x+2y-7=0$?

c) Peut-on trouver m tel que d_m soit parallèle à la droite D' d’équation $-4x+12=0$?

3) Quels sont les points du plan qui n’appartiennent à aucune droite d_m ?

42 a, b et c étant trois réels, on considère la droite d d’équation $ax+by+c=0$ avec $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$.

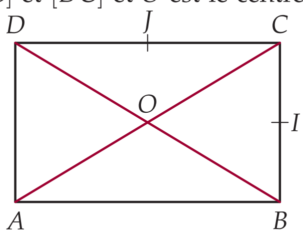
1) À quelle condition, portant sur les réels a, b et c, la droite d passe-t-elle par l’origine du repère ?

2) À quelle condition, portant sur les réels a, b et c, la droite d est-elle parallèle à l’axe des abscisses ?

3) À quelle condition, portant sur les réels a, b et c, la droite d est-elle parallèle à l’axe des ordonnées ?

Décomposition et repère

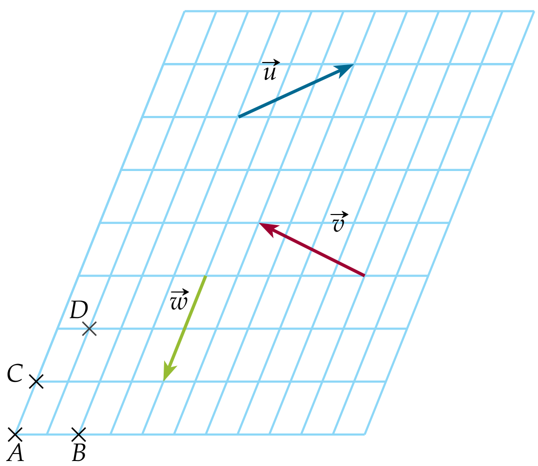
43 $ABCD$ est un rectangle, I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et O est le centre du rectangle.



1) Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AO}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) Même question avec les vecteurs $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

44 On considère la figure ci-dessous.



1) Décomposer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Décomposer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

45 On considère un triangle EFG.

1) Faire une figure et y placer le point H tel que :

$$\overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}.$$

2) En écrivant que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$, démontrer que $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.

3) Que peut-on en déduire concernant le point H ?

46 $ABCD$ est un parallélogramme, F est le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et E le point tel que $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

2) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3) Démontrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

47 Choisir la bonne décomposition

On considère un triangle ABC et les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points A, E et D sont alignés.

48 On considère trois points F, G et H du plan et les points I et J tels que $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} + 3\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.

En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points F, J et I sont alignés.

49 Unicité de la décomposition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires du plan.

On souhaite montrer que la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est unique, c'est-à-dire que s'il existe quatre réels x, y, x' et y' tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et $\vec{w} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

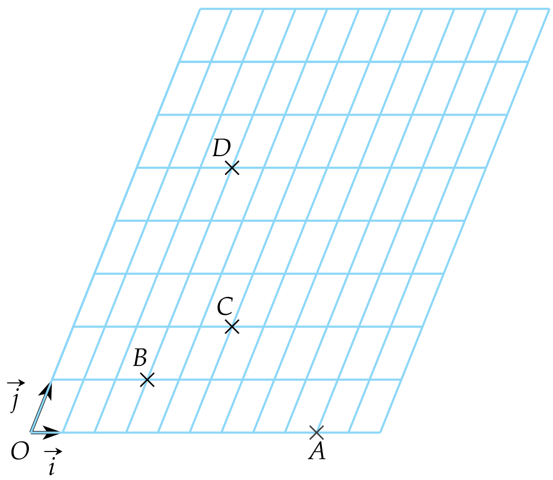
1) Montrer que si $x\vec{u} + y\vec{v} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ alors :

$$(x - x')\vec{u} = (y' - y)\vec{v}.$$

2) Montrer que si $x \neq x'$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3) Conclure.

50 On considère la figure ci-dessous.



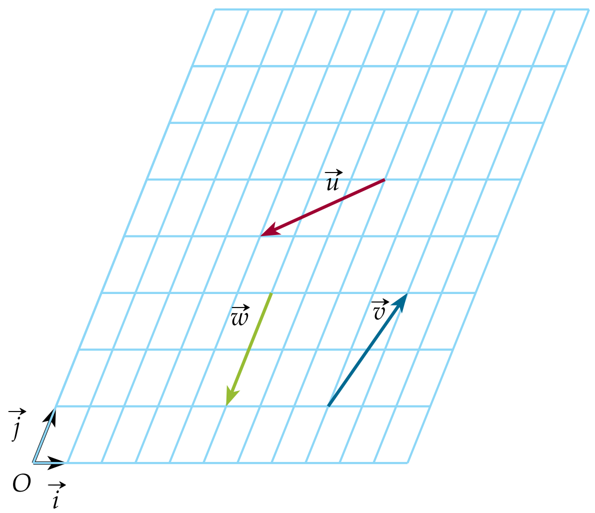
1) Lire graphiquement les coordonnées des points A, B, C, D dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) a) Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ dans ce repère.

b) Retrouver les résultats de la question précédente par le calcul.

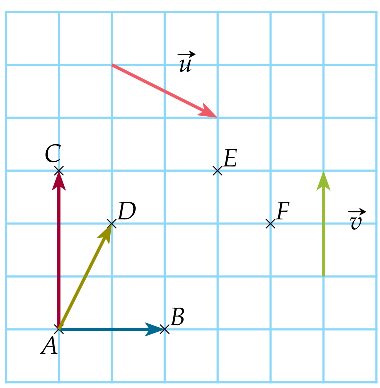
S'entraîner

51 On considère la figure ci-dessous.



1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ et $\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{4}{3}\vec{v}+\vec{w}$.

52 On considère le quadrillage ci-dessous.



1) Donner par lecture graphique les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et des points A, E et F dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
2) Même question dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

53 Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points E et F définis par $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

1) Déterminer les coordonnées de tous les points dans un repère bien choisi.
2) Démontrer que les points D, C et F sont alignés.

54 Dans un triangle ABC, on considère les points D, E et F définis par :

- $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On souhaite montrer, par deux méthodes différentes, que les points D, E et F sont alignés.

Partie A : En décomposant les vecteurs

1) Tracer un triangle ABC et y placer les points D, E et F.
2) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Partie B : Avec un repère

On se place dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

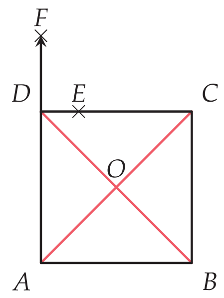
1) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.
2) Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

55 Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points M, N et P tels que :

$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Démontrer que les droites (MD) et (PN) sont parallèles.

56 Dans un carré $ABCD$ de centre O, on considère les points E et F tels que $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.



En vous plaçant dans un repère convenablement choisi, démontrer que les points O, E et F sont alignés.

Norme d'un vecteur

Pour tous les exercices de cette section, on se place dans un repère orthonormé.

57 Calculer la norme des vecteurs suivants.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

3) $\vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\vec{r}\begin{pmatrix} 3a \\ -4a \end{pmatrix}$

58 On considère les points $A(-1\,;\,8)$, $B(6\,;\,12)$, $C(5\,;\,4)$ et $D(-2\,;\,0)$.

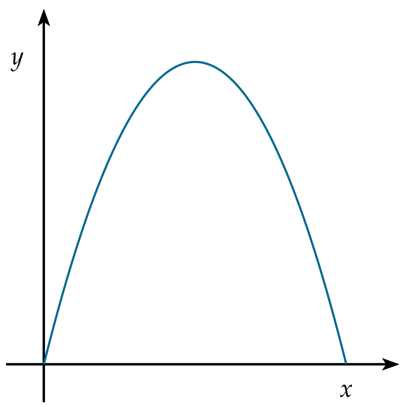
1) Calculer AB et BC.
2) Démontrer que $ABCD$ est un losange.

59 On considère les points $A(-2\,;\,3)$, $C(x\,;\,-1)$ et $B(1\,;\,y)$ où x et y sont des réels.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 5.

1) Déterminer les valeurs possibles de y pour que B appartienne à $\mathcal{C}$.
2) Déterminer les valeurs possibles de x pour que C soit situé strictement à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

60 Un ballon de rugby est envoyé par un joueur de rugby situé à l'origine d'un repère, avant de retomber au sol.
En prenant le mètre pour unité graphique, le ballon suit la trajectoire donnée par l'équation :

$$y = -\frac{x^2}{10} + 4x.$$



1) À quelle distance du joueur le ballon va-t-il retomber ?
2) On cherche à déterminer quelle est la distance la plus éloignée entre le ballon et le pied du joueur lorsque le ballon suit la trajectoire.
   a) On note M la position du ballon après avoir parcouru x mètres horizontalement, et $f(x) = OM^2$.
   Montrer que $f(x) = 0{,}01x^4 - 0{,}8x^3 + 17x^2$.
   b) Déterminer une expression de $f'(x)$.
   c) Déterminer la distance maximale entre le joueur et le ballon.
3) Après avoir tapé dans le ballon, le joueur, dont les yeux sont situés à 1 m 50 du sol, guette le passage du ballon à l'horizontale de ses yeux.
   Quand il verra le ballon passer pour la seconde fois, à quelle distance du point de départ le ballon se trouvera-t-il ? On arrondira le résultat à 0,01 m près.

61 On considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé du plan et un réel k.

Démontrer que $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$.

62 On considère $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les vecteurs colinéaires à $\vec{w}$ de norme 1.

63 **Vecteur directeur normé**

Déterminer tous les vecteurs directeurs de norme 1 de la droite :

1) d_1 d'équation $x - 8 = 2$
2) d_2 d'équation $2x + 3y + 5 = 0$
3) d_3 d'équation $y = 5x + 3$

64 Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2\,;\,1)$, $B\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3}{2}\,;\,1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1) Montrer que $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
2) Trouver un autre repère orthonormé du plan.

65 On considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

Montrer que $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Approfondir

66 ALGO

Écrire un algorithme qui :

- demande en entrée les coordonnées x_A, y_A, x_B et y_B de deux points A et B ;
- affiche en sortie les réels a, b et c d'une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (AB).

67 Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$ et G un point tel que :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}.$$

1) a) Démontrer que G, B et J sont alignés.

b) Que représente G pour le triangle ABC ?

2) a) Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Existe-t-il un autre point M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$?

68 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et la droite d d'équation $5x - 2y + 7 = 0$.

1) Déterminer les points d'intersection de d et de $\mathcal{C}_f$.

2) Soit a un réel et A le point d'abscisse a de $\mathcal{C}_f$, on note T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a, T_A et d sont parallèles.

b) Déterminer, lorsqu'il existe, les coordonnées du point d'intersection de T_A et de d en fonction de a.

69 Soit m un réel, on considère la famille de droites $\mathcal{D}_m$ d'équation :

$$(m+1)x - my - m - 2 = 0.$$

1) Tracer dans un repère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_{-2}$.

2) Montrer que toutes les droites $\mathcal{D}_m$ passent par un même point.

3) Peut-on trouver m tel que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses ?

4) Peut-on trouver m tel que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?

5) Déterminer, en fonction de m, les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathcal{D}_m$ avec les axes du repère.

70 **Programmation linéaire, d'après BAC**

Une petite entreprise fabrique des ours et des lapins en peluche.

La fabrication d'un ours en peluche nécessite 60 cm de tissu et 2 boutons (pour les yeux), celle d'un lapin nécessite 100 cm de tissu et 2 boutons.

Cette entreprise a également des contraintes :

- elle ne dispose que de 16 m de tissu par jour ;
- elle ne dispose que de 36 boutons par jour.

On considère que le coût du fil (nécessaire pour assembler les éléments, ainsi que pour broder les nez) est négligeable, si bien que l'entreprise en dispose à volonté.

On note x le nombre d'ours et y le nombre de lapins en peluche fabriqués par jour.

1) Traduire les contraintes de l'énoncé avec des inéquations portant sur x et y.

2) Montrer que les contraintes précédentes se traduisent par le système (S) suivant :

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 3x+5y & \leqslant & 80 \\ x+y & \leqslant & 18 \end{array}\right. .$$

3) Tracer dans un repère adapté les droites d'équations $3x + 5y - 80 = 0$ et $x + y - 18 = 0$.

4) Si l'entreprise produit 7 ours en peluche, combien de lapins en peluche peut-elle produire ?

5) L'entreprise réalise un bénéfice de 6 € sur un ours en peluche et un bénéfice de 8 € sur un lapin en peluche.

On suppose que l'entreprise vend toute sa production.

a) Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice journalier qu'elle réalise.

b) Donner une équation de la droite qui correspond à un bénéfice de 120 €.

Tracer, dans le repère précédent, cette droite et donner un couple solution du système (S) correspondant à un bénéfice de 120 €.

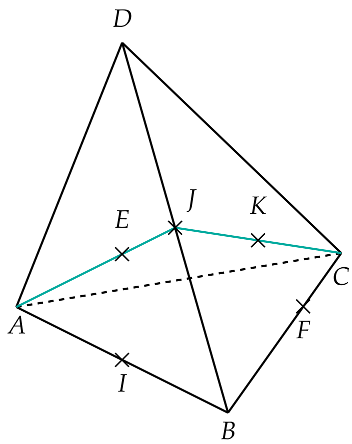
c) Déterminer graphiquement le nombre d'ours et de lapins en peluche à fabriquer par jour pour assurer un bénéfice maximal.

Expliquer brièvement votre méthode.

d) Quel est alors ce bénéfice maximal en euros ?

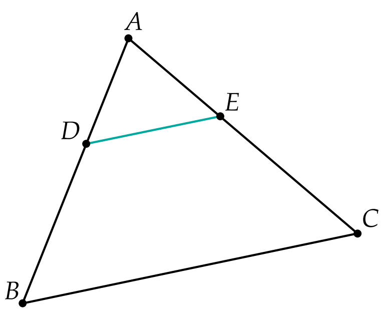
71 On considère deux vecteurs du plan $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ où x et y sont réels.
Déterminer pour quelles valeurs de x et y les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

72 Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$. I, J et K sont les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[JC]$ et E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



1) a) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{DE}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b) Démontrer que les points I, E et D sont alignés.
2) Démontrer que les points F, K et D sont alignés en choisissant une décomposition de vecteurs du plan (BCD).

73 On considère la configuration suivante, où l'on a $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ avec $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.



On souhaite démontrer la réciproque du théorème de Thalès :

$$\text{si } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \text{ alors } (DE)//(BC).$$

1) Démontrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3) Conclure.

74 Dans un triangle ABC, on considère deux points $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ distincts des extrémités des segments.
On souhaite montrer, par deux méthodes différentes, le théorème de Thalès :
si (DE) et (BC) sont parallèles, alors :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Partie A : Avec les coordonnées

1) a) Donner les coordonnées de A, D et E dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   b) Expliquer pourquoi il existe deux réels k et k' non nuls tels que l'on ait $B(k;0)$ et $C(0;k')$ dans ce repère.
2) a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ en fonction de k et k'.
   b) En déduire que si (DE) et (BC) sont parallèles, alors $k = k'$.
3) Exprimer :
   - $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et k ;
   - $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$ et k ;
   - $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{DE}$ et k.
4) Conclure.

Partie B : Géométriquement

1) Expliquer pourquoi il existe trois réels k, k' et k'' tels que :
   - $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{BC}$
   - $\overrightarrow{AD} = k'\overrightarrow{AB}$
   - $\overrightarrow{AE} = k''\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que $k\overrightarrow{BC} = k'\overrightarrow{BA} + k''\overrightarrow{AC}$.
3) a) En déduire que $(k - k')\overrightarrow{BA} = (k'' - k)\overrightarrow{AC}$.
   b) Justifier que si $k \neq k'$ alors on obtient une contradiction avec la situation de départ.
   Que peut-on en déduire ?
   c) Justifier qu'alors $k = k''$.
4) Conclure.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Utiliser le critère de colinéarité pour démontrer
- le parallélisme de deux droites
- l'alignement de trois points

Déterminer une équation de droite
- avec un point et un vecteur directeur
- avec deux points

Une équation de droite étant donnée
- déterminer un vecteur directeur
- déterminer si des points appartiennent à la droite
- trouver des coordonnées de points de la droite
- tracer la droite

Un vecteur étant donné
- donner sa décomposition selon deux vecteurs non colinéaires
- donner ses coordonnées dans un repère

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère les points $A\begin{pmatrix}0\,;\,-\dfrac{7}{3}\end{pmatrix}$, $B(3\,;\,-3)$, $C(5\,;\,-7)$, $D\begin{pmatrix}1\,;\,-\dfrac{13}{3}\end{pmatrix}$ et $E(2\,;\,-3)$ dans un repère du plan.

75 Le point E appartient à la droite d'équation :

(a) $x+2y+4=0$ (b) $2x+10-3y=0$ (c) $-3x+2y=0$ (d) $-0,25x+\frac{1}{2}y=-2$

76 Un vecteur directeur de la droite d d'équation $2x-3y+1=0$ est :

(a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ (b) $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ (c) $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ (d) $\vec{r}\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}$

77 Le quadrilatère $ABCD$ est un :

(a) carré (b) losange (c) trapèze (d) parallélogramme

On considère les points $A\begin{pmatrix}1\,;\,-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $B(-2\,;\,0)$ dans un repère du plan.

78 La droite (AB) est parallèle à la droite d'équation :

(a) $6x+y+1=0$ (b) $3y-1=x$ (c) $3y+\frac{x}{2}=0$

On considère les droites d_1 et d_2 d'équation respective $2x+3y-7=0$ et $-5x+8y+2=0$.

79 Les droites d_1 et d_2 sont :

(a) sécantes (b) parallèles (c) confondues

80 Le point d'intersection des droites d_1 et d_2 a pour coordonnées :

(a) $(2\,;\,1)$ (b) $(-2\,;\,-1)$ (c) $(1\,;\,2)$ (d) $(-1\,;\,-2)$

81 Une droite d passe par l'origine du repère.
Une équation possible est :

(a) $x - 4 = 0$ (b) $y = 0$ (c) $3x + 4y - 1 = 0$ (d) $2x + \frac{y}{3} = 0$

A, B et C sont trois points du plan et D est le point tel que $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

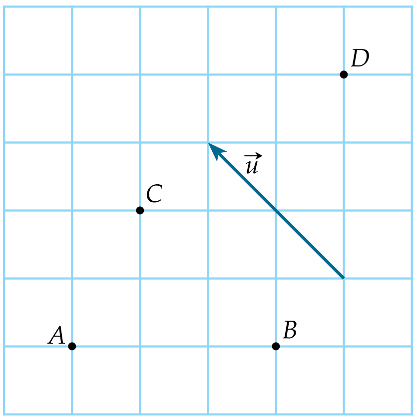
82 Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

(a) $\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ (b) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ (c) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ (d) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

83 Soit deux vecteurs $\vec{u} = 0{,}2\overrightarrow{AB} - 0{,}7\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = -2{,}4\overrightarrow{AB} + 8{,}4\overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$:

(a) sont colinéaires (b) ne sont pas colinéaires

On considère la configuration suivante.



84 Les coordonnées de D dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont :

(a) $(4\ ;\ 1)$ (b) $\left(\frac{2}{3}\ ;\ 2\right)$ (c) $(4\ ;\ 4)$ (d) $(2\ ;\ 2)$

85 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

86 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$ sont :

(a) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

Travaux pratiques

TP 1 Un quadrilatère particulier dans un quadrilatère quelconque

INFO

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
2) Construire un quadrilatère $ABCD$ quelconque dans le plan.
3) Construire les points I, J, K et L, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
4) Construire le quadrilatère $IJKL$.
5) Déplacer les points A, B, C et D.
Quelle conjecture peut-on faire ?
6) **a)** Décomposer $\overrightarrow{IJ}$ selon un couple de vecteurs judicieusement choisi.
b) Démontrer la conjecture faite à la question 5.

TP 2 Appartient ? N'appartient pas ?

ALGO

1) On considère la droite d d'équation $\frac{1}{3}x - y + 1 = 0$ et le programme suivant, écrit avec Algobox.

```
VARIABLES
  XA EST_DU_TYPE NOMBRE
  YA EST_DU_TYPE NOMBRE
  R EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE XA
  LIRE YA
  R PREND_LA_VALEUR XA/3-YA+1
  SI (R==...) ALORS
    DEBUT_SI
  ...
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
  ...
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

a) Recopier le programme avec le logiciel Algobox.
b) Compléter le programme pour que, lorsque l'on donne en entrée les coordonnées XA et YA d'un point A, il renvoie en sortie si ce point appartient ou non à la droite d.

2) Écrire un programme qui remplit la même fonction, lorsque l'on donne en plus en entrée les coefficients a, b et c donnant une équation cartésienne d'une droite quelconque.

TP 3 Une histoire de mobile

Hélène a fabriqué un mobile à installer au-dessus du lit de sa fille. Celui-ci est constitué d'une tige de métal de 40 cm, matérialisée par le segment $[AB]$, sur laquelle pendent un triangle et un disque à chaque extrémité.

Le triangle pèse 1 décagramme et le disque pèse 3 décagrammes.

1 Comment accrocher le mobile ?

1) Voulant installer le mobile à un fil attaché au plafond, elle accroche le fil au milieu de la tige. Le mobile est-il d'aplomb ? Si non, de quel côté penche-t-il ?

2) Hélène se renseigne alors auprès d'un ami professeur de Physique qui lui explique qu'il faut accrocher le mobile en un point G tel que :

$$m_1\overrightarrow{GA} + m_2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

où m_1 et m_2 sont les masses respectives du triangle et du disque.

a) Écrire l'égalité vectorielle précédente en remplaçant m_1 et m_2 par leur valeur en décagramme.

b) Justifier que G appartient à (AB).

c) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

d) Tracer le segment $[AB]$ à l'échelle 1:10 et y placer le point G.

3) a) Reprendre les questions précédentes en prenant les masses m_1 et m_2 en **grammes**.

b) Que remarque-t-on ?

2 Un peu de théorie

Quand on considère deux points distincts A et B du plan et deux réels a et b non nuls tels que $a + b \neq 0$ alors il existe un unique point G vérifiant l'égalité vectorielle :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé **barycentre** des points pondérés $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$.

Soit A et B deux points distincts du plan.

1) a) En vous inspirant de la partie précédente, avec les mobiles, conjecturer quel est le barycentre de $(A\,;\,1)$ et $(B\,;\,1)$?

b) Vérifier par le calcul.

2) Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,;\,a)$ et $(B\,;\,b)$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

b) Tracer un segment $[AB]$ mesurant 5 cm et y placer le barycentre des points pondérés $(A\,;\,4)$ et $(B\,;\,1)$.

3) Soit G' le barycentre des points pondérés $(A\,;\,k \times a)$ et $(B\,;\,k \times b)$ avec k réel. Montrer que G et G' sont confondus.

Travaux pratiques

TP 4 La logique du système

INFO

1) On considère les points $A(-1\,;\,3)$ et $B(2\,;\,2)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

a) Construire les points A et B dans le repère puis tracer la droite (AB).

b) Vérifier le résultat de la question **1)** dans la fenêtre algébrique du logiciel de géométrie dynamique.

3) On s'intéresse maintenant au système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ -10x + 6y - 4 = 0 \end{cases}.$$

a) Résoudre ce système par le calcul.

b) Entrer l'équation cartésienne de droite $-10x + 6y = 4$ dans la barre de saisie.

c) Retrouver géométriquement le résultat de la question **3)a)**.

4) Résoudre le système suivant et contrôler géométriquement :

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{y}{2} = 2 \\ -2x + \dfrac{y}{3} = -1 \end{cases}.$$

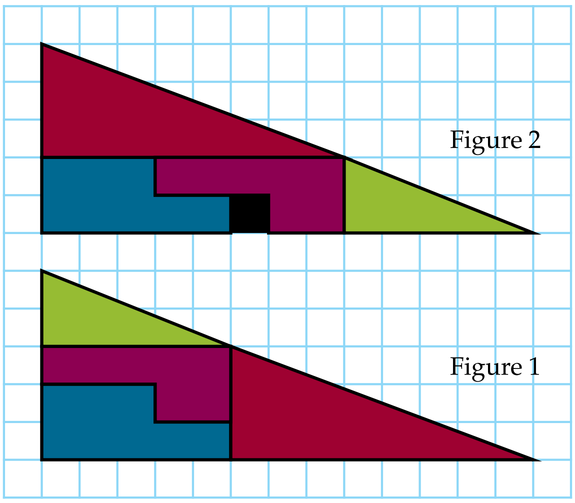
Récréation, énigmes

Points à coordonnées entières

Dans un repère orthonormé, soit $A(10\,;\,0)$, $B(10\,;\,10)$ et $C(0\,;\,10)$.
Déterminer l'ensemble des points à coordonnées entières sur la droite d d'équation $2x - 3y + 3 = 0$ situés à l'intérieur du carré $OABC$.

Un puzzle de Lewis Caroll

D'où provient le carré noir de la figure 2 ?



GÉOMÉTRIE

2

Angles orientés et trigonométrie

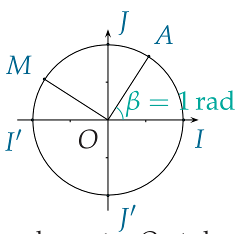
Connaissances nécessaires à ce chapitre

- ▶ Connaître les angles géométriques
- ▶ Connaître les figures du plan
- ▶ Savoir les formules de trigonométrie
- ▶ Connaître le nombre π

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1



Le cercle ci-dessus, de centre O et de rayon 1, est appelé cercle trigonométrique.

1) Donner la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$. Que vaut $\widehat{IOJ}$?

2) La mesure d'un angle géométrique $\widehat{IOM}$ en radians est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.
Compléter le tableau suivant donnant la correspondance entre la mesure en degré de l'angle $\widehat{IOM}$ et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.

mesure en degré	60		90		180
longueur de l'arc		1		$\frac{5\pi}{6}$	π

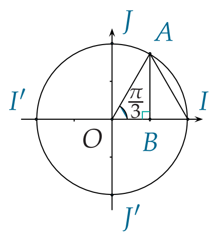
2 On considère les nombres suivants :
$\frac{\pi}{4}$, $-\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

1) Ranger ces nombres dans l'ordre croissant.

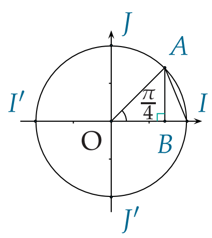
2) Quels nombres appartiennent à $]-\pi\,;\,\pi]$? à $[0\,;\,2\pi[$?

3

1) Quelle est la nature du triangle OAI ?
En déduire $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.



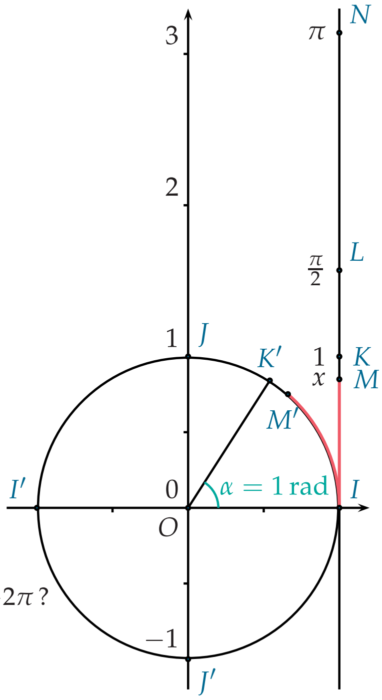
2) Quelle est la nature du triangle OAB ?
En déduire $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.



Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Du ruban au radian



$(O\ ;\ I, J)$ est un repère orthonormal et C est le cercle de centre O et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique. La droite (IK), munie du repère $(I\ ;\ K)$ est enroulée autour de C.

Dans ce repère, M a pour abscisse x et les points K, L et N ont respectivement pour abscisses 1, $\frac{\pi}{2}$ et π.

Le point M de la droite (IK), tel que M a pour abscisse x dans le repère $(I\,;\,K)$, a pour point-image sur le cercle C le point M' de sorte que la longueur de l'arc $\widehat{IM'}$ est égale à la longueur IM.

Le point-image de K sur le cercle C est le point K'.

1) a) Quelle est la longueur de l'arc $\widehat{IK'}$?

b) En déduire une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOK'}$.

2) Point-images sur le cercle

a) Quels sont les point-images sur le cercle C des points L et N ?

b) En déduire une mesure en radian des angles $\widehat{IOJ}$ et $\widehat{IOI'}$.

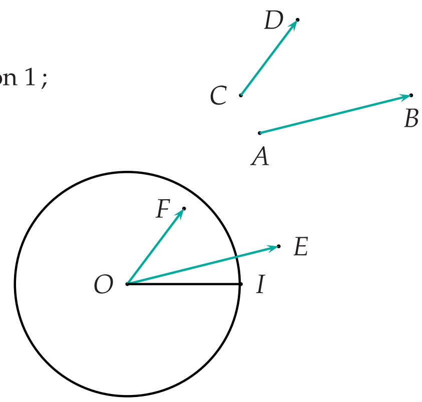
c) Quel est le point-image sur le cercle du point P d'abscisse 3π ?

d) Quel est le point-image sur le cercle C du point d'abscisse $-\pi$?-2π ?

e) En déduire le nombre de points sur la droite (IK) ayant pour point-image un point M donné sur le cercle.
Préciser leurs abscisses dans le repère $(I\ ;\ K)$.

ACTIVITÉ 2 Où est l'angle ?

INFO



1) Construire avec un logiciel de géométrie :

a) le point O centre du repère et le cercle C de centre O et de rayon 1 ;

b) quatre points A, B, C et D (B distinct de A et D distinct de C) puis les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2) On souhaite obtenir une mesure en radian de l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, que l'on note $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

a) Construire les représentants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origine O.

b) Renommer les extrémités obtenues E et F respectivement, puis créer les points E' et F', points d'intersection des demi-droites $[OE)$ et $[OF)$ avec le cercle C.

c) Afficher l'angle géométrique $\widehat{E'OF'}$.

d) Déplacer le point D de sorte que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires de même sens, puis colinéaires de sens opposé.
Que remarque-t-on pour E' et F' ?
Noter la valeur de l'angle $\widehat{E'OF'}$ dans chaque cas.

3) La mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est définie comme la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OF'}\right)$.

Elle est égale à la mesure de l'angle géométrique $\widehat{E'OF'}$ et comptée positivement si l'on tourne de E' vers F' dans le sens trigonométrique, négativement sinon.

a) Créer le point $I(1\,;\,0)$ puis replacer D à un endroit quelconque.

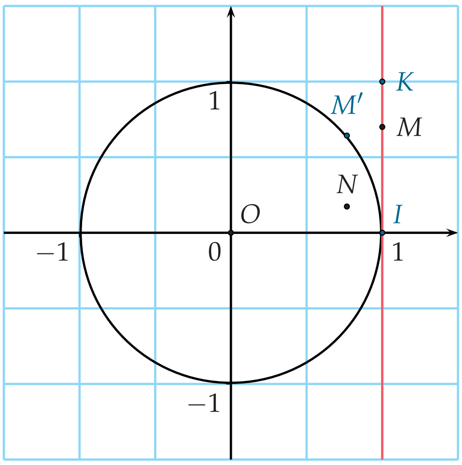
b) Afficher une mesure en radian de l'angle $\widehat{E'OF'}$.

c) Déplacer les points A, B, C et D pour faire en sorte que :
$\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE'}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OF'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Que vaut alors $\left(\overrightarrow{OE'},\overrightarrow{OF'}\right)$?

d) On pose $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE'}\right) = x$ et $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OF'}\right) = y$.
Comment peut-on calculer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE'},\overrightarrow{OF'}\right)$?

ACTIVITÉ 3 Cosinus en double

INFO



On utilise un logiciel de géométrie dynamique et on se place dans le repère orthonormé $(O\,;\,I,\,J)$.

1) Tracer le cercle trigonométrique de centre O, le point $K(1\,;\,1)$ puis la droite (IK).

2) Créer un point M' sur le cercle C dans le demi-plan supérieur puis l'arc de cercle $\widehat{IM'}$ de centre O. Le point M' est le point image d'un point M sur le cercle C tel que la longueur IM soit égale à la longueur de l'arc $\widehat{IM'}$.
On note α la mesure, en radian, de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$. On a $\alpha \in [0\,;\,\pi]$.

a) Quelles sont les coordonnées de M ?

b) Quelles sont les coordonnées de M' ?

3) On considère le point N de coordonnées $(\cos\alpha\,;\,\cos 2\alpha)$.

a) Créer le point N en remarquant que $\alpha = y_M$, puis afficher la trace du point N lorsque le point M' décrit le cercle C.

b) L'abscisse x de N vérifie $-1 \leq x \leq 1$.
Quelle semble être la trajectoire décrite par le point N ?

c) On pose $y = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des nombres réels, l'équation de la courbe représentative correspondant à la trajectoire de N sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
On note sa forme canonique $y = a(x-e)^2 + f$ où e et f sont des nombres réels.
Déterminer e et f par lecture graphique puis en déduire a par le calcul.

d) En déduire la relation $\cos(2\alpha) = 2(\cos\alpha)^2 - 1$.

4) En utilisant cette relation :

a) calculer $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ à l'aide de $\cos\dfrac{\pi}{3}$;

b) calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$;

c) montrer que quel que soit x réel : $\cos 2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha)^2$.

Cours - Méthodes

Dans ce chapitre, on munit le plan du repère orthonormé $(O\ ;\ I, J)$.

1. Repérage sur le cercle trigonométrique

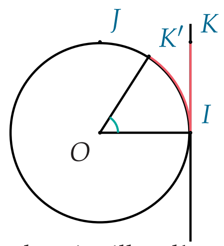
A. Enroulement de la droite numérique

DÉFINITION : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O et de rayon 1. Il est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct**, qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Avec ce choix, on dit que le **plan est orienté**.

RAPPEL :

Les points I et J sont situés sur le cercle trigonométrique. Soit K le point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ dans le repère $(O\ ;\ I\ ,\ J)$. La droite (IK) a pour équation $x = 1$. C'est une droite numérique pour laquelle on considère le repère $(I\ ;\ K)$ dont l'origine est I et tel que $IK = 1$.



On enroule la demi-droite $[IK)$ autour du cercle C dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ainsi, à tout nombre réel x positif correspond un unique point-image M sur le cercle C.
Sur la figure, on voit K' le point-image de K sur le cercle trigonométrique.
En enroulant la demi-droite correspondant aux nombres réels négatifs dans le sens des aiguilles d'une montre, on fait également correspondre à tout nombre réel x négatif un point M sur le cercle C.
Dans chacun de ces deux cas, on dit que x a pour point-image M sur le cercle C. Si x' est un nombre obtenu à partir de x en ajoutant ou en enlevant un nombre de tours $(k \times 2\pi, k \in Z)$, alors x et x' ont le même point-image sur C. Ainsi, un point du cercle est l'image d'une infinité de réels (positifs et négatifs).

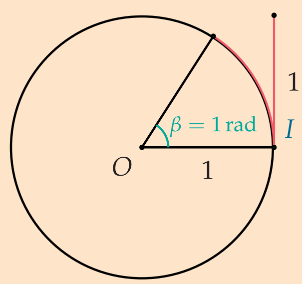
PROPRIÉTÉ

Tout nombre réel x a un point-image unique sur le cercle C.
S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + k \times 2\pi$, alors x et x' ont le même point-image sur le cercle C.

B. Le radian

DÉFINITION : Radian

La mesure en **radian** d'un angle est égale à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte.



Exemple Un angle plat (180°) mesure exactement π radians, soit environ 3,14 radians.

NOTATION : Le radian est noté rad. Cette notation est omise en général, contrairement à celle du degré.

PROPRIÉTÉ

Les mesures des angles en degré et en radian sont proportionnelles.

MÉTHODE 1 Convertir entre degrés et radians

▶ Ex. 1 p. 203

Exercice d'application

Calculer les nombres x, y et z dans le tableau suivant de conversion entre degrés et radians.

Mesure en degré	0	30	y	150	180
Mesure en radian	0	x	$\frac{\pi}{2}$	z	π

Correction

$\frac{180}{30} = 6$ donc $x = \frac{\pi}{6}$ rad.

$\frac{\pi}{2}$ rad est la moitié de π rad, donc y est la moitié de 180 degrés, c'est-à-dire $y = 90°$ et $z = \frac{150 \times \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

2. Mesures d'un angle orienté

DÉFINITION : Angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On définit les points M et N tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont leurs représentants respectifs d'origine O. Soit M' et N' les points d'intersection des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique.
Soit x et y deux nombres réels qui ont pour points-images M' et N', alors $y - x$ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

REMARQUES :

- Si M est le point-image du réel x, alors $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = x$.
- Un angle orienté a une infinité de mesures différentes. Cependant, elles sont toutes égales à un nombre entier de fois 2π près, c'est-à-dire à un nombre $k \times 2\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$), ou encore modulo 2π. On ne le notera pas systématiquement mais c'est important de le savoir car une division (ou une multiplication) peut s'avérer problématique.
  L'équation $2x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ est équivalente à $x = \frac{\pi}{4} + k \times \pi$. Cette égalité entre x et $\frac{\pi}{4}$ est alors réalisée modulo π et non modulo 2π.

PROPRIÉTÉ : Mesure principale

L'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ a une unique mesure α dans l'intervalle, $]-\pi\,;\,\pi]$ appelée **mesure principale**.

Exemple Dans le repère orthonormé $(O\,;\,I, J)$, on a l'égalité $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Cours - Méthodes

MÉTHODE 2 Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

► Ex. 4 p. 203

Pour obtenir la mesure principale :

- soit la mesure de l'angle est dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, c'est alors la mesure principale ;
- soit la mesure de l'angle est strictement supérieure à π. On retranche 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\,;\,\pi]$;
- soit la mesure de l'angle est inférieure ou égale à π. On ajoute 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice d'application

$(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{29\pi}{6}$.

Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$?

Correction

$\dfrac{29\pi}{6}$ n'est pas la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ car $\dfrac{29\pi}{6} \notin\ ]-\pi\,;\,\pi]$.

Combien de fois 2π faut-il retrancher pour obtenir la mesure principale ?

On retranche 2π :

$\dfrac{29\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{29\pi}{6} - \dfrac{12\pi}{6} = \dfrac{17\pi}{6}$.

Mais $\dfrac{17\pi}{6} \notin\ ]-\pi\,;\,\pi]$.

On retranche donc de nouveau 2π :

$\dfrac{17\pi}{6} - 2\pi = \dfrac{17\pi}{6} - \dfrac{12\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$. $\dfrac{5\pi}{6} \in\ ]-\pi\,;\,\pi]$.

La mesure principale de $\dfrac{29\pi}{6}$ est donc $\dfrac{5\pi}{6}$.

PROPRIÉTÉS

1) Relation de Chasles pour les angles

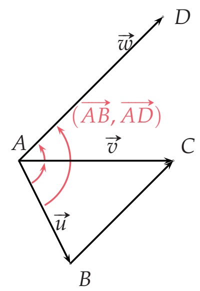
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls, alors $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.

2) Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

REMARQUES :

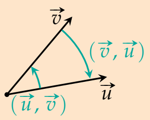
- La **relation de Chasles** pour les **angles orientés** est plus difficile à utiliser, en pratique, que la relation de Chasles pour les vecteurs. En effet, on peut écrire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
- Il est parfois intéressant dans les exercices d'écrire que la somme des angles d'un triangle est égale à π dans le sens trigonométrique :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi$.



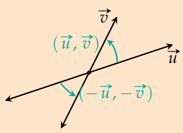
PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

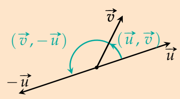
1) $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$



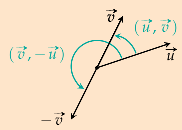
2) $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$



3) $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



4) $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



PREUVE

1) $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u})$ d'après la relation de Chasles.
On a $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 0$ et donc $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$.

2) $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})$ d'après la relation de Chasles.
Or $(-\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{v}, -\vec{v}) = \pi$ donc $(-\vec{u}, -\vec{v}) = 2\pi + (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$.

3) $(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v})$ d'après la relation de Chasles et $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$.
Donc $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

4) De la même manière qu'en **3)** : $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v})$ et $(\vec{v}, -\vec{v}) = \pi$.
Donc $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

PROPRIÉTÉ : Généralisation de la propriété précédente

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k et k' deux nombres réels non nuls.

$$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = \begin{cases} (\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } k \text{ et } k' \text{de même signe} \\ (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \text{ sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLES : $(2\vec{u}, 2\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ et $(2\vec{u}, -3\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

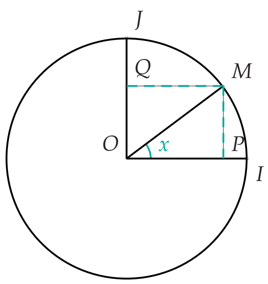
3. Cosinus et sinus d'un réel et d'un angle orienté

A. Repérage à l'aide du cosinus et du sinus

THÉORÈME : Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

Soit x un nombre réel et M le point-image de x sur le cercle trigonométrique C.
Le point M a pour coordonnées $(\cos x\ ;\ \sin x)$.

PREUVE



Soit M le point-image d'un réel x tel que $x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
On note respectivement P et Q les projetés orthogonaux de M sur (OI) et (OJ).
Dans le triangle OPM rectangle en P :
$\cos x = \frac{OP}{OM}$. Or $OM = 1$ donc $OP = \cos x$.
Par conséquent, le point M a pour abscisse $\cos x$.
On montre de même que $\sin x = \frac{PM}{OM}$.
Or $PM = OQ$ et $OM = 1$, on en déduit que $OQ = \sin x$ et, par conséquent, M a pour ordonnée $\sin x$.
Si $x \notin \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, on peut démontrer le théorème en utilisant des symétries.

EXEMPLES :

- Le nombre réel 0 a pour point-image $I(1\,;0)$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.
- Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ a pour point-image $J(0\,;1)$ donc $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

PROPRIÉTÉS

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k :

1) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
2) $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
3) $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

Cours - Méthodes

PREUVE Soit M le point-image du nombre réel x.

1) Ses coordonnées sont $(\cos x\ ;\ \sin x)$ et $M \in \mathcal{C}$ donc $OM = 1$, ce qui se traduit par $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2} = 1$, d'où la conclusion.

2) L'égalité **1)** entraîne immédiatement $(\cos x)^2 \leqslant 1$ et $(\sin x)^2 \leqslant 1$ car les deux expressions $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$ sont positives ou nulles. Or quel que soit un réel, $x^2 \leqslant 1$ est équivalent à $-1 \leqslant x \leqslant 1$, d'où le résultat.

3) Soit M' le point-image du nombre réel $x + k \times 2\pi$. Les points M et M' sont confondus. Ils ont donc même abscisse et même ordonnée.

MÉTHODE 3 Calculer $\sin x$ quand on connaît $\cos x$

► Ex. 32 p. 206

1) On utilise l'égalité $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ pour calculer $(\sin x)^2$.
2) On détermine le signe de $\sin x$ en utilisant l'intervalle auquel appartient x :
   - si la mesure principale de x appartient à $]0\ ;\ \pi[$, alors $\sin x > 0$;
   - sinon si la mesure principale de $]-\pi\ ;\ 0[$, alors $\sin x < 0$.
3) On conclut sur la valeur exacte de $\sin x$.

Exercice d'application

Calculer $\sin \frac{\pi}{3}$ sachant que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Correction

$\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$ est équivalent à $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2$

soit $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

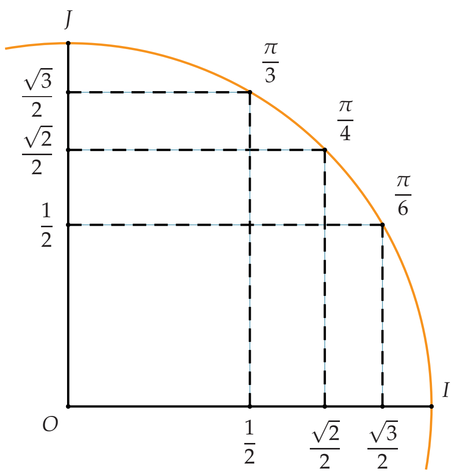
Or $\frac{\pi}{3} \in\ ]0\ ;\ \pi[$ donc $\sin \frac{\pi}{3} > 0$. En conclusion, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

REMARQUE : On calcule la valeur exacte de $\sin x$ quand on connaît $\cos x$ de la même façon. Si la mesure principale de $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos x \geq 0$ sinon $\cos x < 0$.

NOTATION : On note souvent $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$.

VALEURS PARTICULIÈRES :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



REMARQUE :

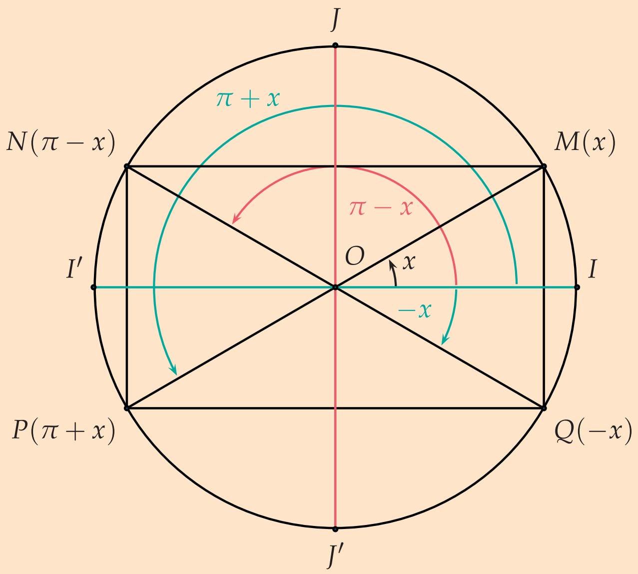
On note la symétrie du tableau. Elle est liée à la symétrie par rapport à la bissectrice de $\widehat{IOJ}$ qui passe par le point-image de $\frac{\pi}{4}$. Pour mémoriser ce tableau, il suffit donc de se rappeler des trois valeurs suivantes : $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. Angles associés

PROPRIÉTÉ : Angles associés

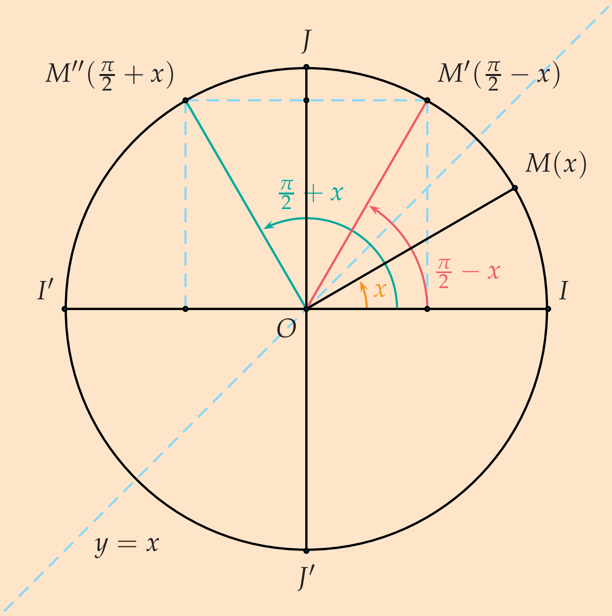
Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$



Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$



Cours - Méthodes

Remarque : Les points I' et J' sont symétriques respectivement de I et de J par rapport au point O. Ce sont les points-images de π et $-\dfrac{\pi}{2}$: $\begin{cases} \cos\pi = -1 \\ \sin\pi = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$.

MÉTHODE 4 Calculer une mesure des angles associés

► Ex. 41 p. 207

Exercice d'application

On sait que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. En déduire $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\dfrac{4\pi}{3}$.

Correction

En appliquant directement la formule $\cos(-x) = \cos x$, il vient $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

De même, on peut remarquer également que $\dfrac{4\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3}$ et donc :

$\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ car $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

C. Formules de duplication

PROPRIÉTÉ

Quels que soient les nombres a et b :

1) $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

2) $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$

3) $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

4) $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

PREUVE

1) Admis ici.

2) On obtient cette égalité à partir de l'égalité **1)** en remplaçant b par $-b$:

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a\cos(-b) - \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

3) $\sin(a+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$

Et donc d'après **2)** $\sin(a+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$.

Or $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x. \end{cases}$

On en déduit donc $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

4) On remplace b par $-b$ dans l'égalité (3). Cela donne :

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a\cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

PROPRIÉTÉS

1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

2) $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

PREUVE

1) En remplaçant b par a dans la formule **1)** de la propriété précédente, on obtient la formule de duplication suivante : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Or $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc on peut remplacer $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$ dans la formule précédente et on obtient $\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$, formule qui a été conjecturée dans l'**activité 3** p. 193. En remplaçant $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, on obtient également :

$\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

2) En remplaçant b par a dans la formule **3)** de la propriété précédente, on obtient la formule de duplication suivante : $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.

MÉTHODE 5 Utiliser une formule de duplication

► Ex. 45 p. 207

Exercice d'application

1) On sait que $\cos x = 0,1$, calculer $\cos 2x$. **2)** Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ à l'aide de $\cos \frac{\pi}{4}$.

Correction

1) En utilisation la propriété précédente :
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times 0,1^2 - 1 = 0,02 - 1 = -0,98$

2) On peut remarquer que $\frac{\pi}{4} = \frac{2 \times \pi}{8}$ donc $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{2\pi}{8} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ et on peut en déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ en résolvant l'équation précédente : $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$, soit $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
Or $\frac{\pi}{8} \in \left]0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ et on en déduit que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

4. Équations et inéquations trigonométriques

A. Équations $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

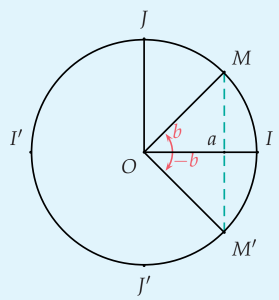
MÉTHODE 6 Résoudre $\cos x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$

► Ex. 49 p. 207

Cela revient à chercher les points-images sur le cercle dont l'abscisse est égale à a.

1) Pour résoudre l'équation $\cos x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi \,;\, \pi]$.

2) Dans le cas général, $a \in]-1 \,;\, 1[$.
Il existe un unique nombre b dans $]0 \,;\, \pi[$ tel que $a = \cos b$.
Les solutions de $\cos x = \cos b$ sont par conséquent b et $-b$.
Une valeur approchée de b peut être obtenue à l'aide de la calculatrice : on met la calculatrice en mode radians puis on utilise 2nd COS a.



3) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π :
$b + k \times 2\pi$ et $-b + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice d'application

Résoudre dans $]-\pi \,;\, \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Correction

On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. L'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi \,;\, \pi]$: $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.
Dans $\mathbb{R}$, cette équation a une infinité de solutions. Les deux solutions précédentes sont encore valables plus toutes celles que l'on obtient en ajoutant ou en soustrayant un nombre entier de fois 2π.
Les solutions sont $\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

MÉTHODE 7 Résoudre $\sin x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$

► Ex. 50 p. 207

Pour résoudre l'équation $\sin x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

1) Dans le cas général $a \in\,]-1\,;\,1[$, il existe un unique nombre b dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = \sin b$. L'équation est donc équivalente à $\sin x = \sin b$, ce qui est équivalent à $x = b$ ou $x = \pi - b$.
2) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b + k \times 2\pi$ et $\pi - b + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice d'application

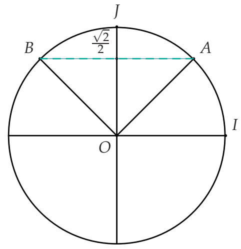
Résoudre l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction

On remarque que l'équation est équivalente à $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{4}$

Les solutions de cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ dont les points-images sur le cercle sont A et B.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc :
$\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



B. Inéquation du type $\cos x \geq a$ ou $\sin x \geq a$ avec $a \in I$, I intervalle donné

MÉTHODE 8 Résoudre une inéquation trigonométrique

► Ex. 54 p. 207

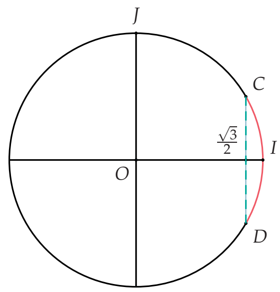
Exercice d'application

Résoudre l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Correction

L'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est équivalente à $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$ dont les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$. Les nombres dont le point-image sur le cercle a une abscisse supérieure strictement à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont compris strictement entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ dans le sens trigonométrique.

L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle : $S = \left]-\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right[$.



Remarques :

1) Des cas particuliers peuvent se présenter, il faut faire attention à traduire $\cos x \geq a$ (resp. $\sin x \geq a$) par : on cherche les nombres réels dont le point-image sur le cercle a une abscisse (resp. ordonnée) supérieure ou égale à a.
2) L'intervalle de résolution I n'est pas toujours $]-\pi\,;\,\pi]$. L'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ est un autre intervalle possible pour décrire le cercle trigonométrique. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$ est $S = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{11\pi}{6}\,;\,2\pi\right[$.

Activités mentales

1 ▶ MÉTHODE 1 p. 195

Préciser la mesure de l'angle géométrique correspondant en degré.

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
x (degré)						

2 Donner une mesure en radian des angles géométriques suivants.

x (degré)	30	45	75	90	135	150
x (rad)						

3 **Vrai ou Faux**

Ces nombres ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1) $\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{4\pi}{5}$

2) $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{21\pi}{5}$

3) $-\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{7\pi}{5}$

4) $-\frac{3\pi}{5}$ et $-\frac{18\pi}{5}$

4 ▶ MÉTHODE 2 p. 196

Donner la mesure principale des angles suivants.

1) 15π, -3π, -6π, 28π et $-\pi$

2) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{2}$ et $\frac{26\pi}{2}$

5 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$. Donner une mesure de :

1) $(\vec{v}, \vec{u})$

2) $(\vec{u}, -\vec{v})$

3) $(-\vec{u}, -\vec{v})$

4) $(\vec{v}, -\vec{u})$

6 Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Donner une mesure de :

1) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}\right)$

7 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ et $\vec{t}$ des vecteurs non nuls.

Compléter.

1) $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = ...$

2) $(..., \vec{w}) + (..., \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{t})$

3) $(\vec{t}, \vec{w}) + (..., \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{w})$

8 Compléter.

1) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = ...$

2) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{...C}, \overrightarrow{A...}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

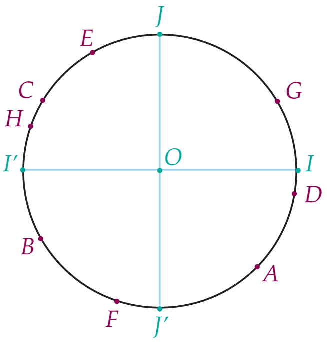
3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A...}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{...B}\right)$

9 Compléter le tableau.

x en radian	$\frac{\pi}{3}$	...	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$	...
$\cos x$	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	-1	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Repérage

10 Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



1) À l'aide d'un rapporteur, associer à chaque point (de A à F) le nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ dont il est le point-image :

$$\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{6\pi}{10} \text{ et } \frac{9\pi}{10}.$$

2) Donner les nombres réels dont les points-images sont les points précédents (de A à F), cette fois, dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$.

11 Donner plusieurs nombres réels qui ont même point-image que :

1) $\frac{2\pi}{3}$

2) $-\frac{\pi}{5}$

3) $-\frac{27\pi}{4}$

4) $\frac{3\pi}{10}$

12 Donner tous les nombres réels qui ont même point-image que :

1) $\frac{\pi}{3}$

2) $-\frac{3\pi}{5}$

13 **Conversion**

1) Convertir les mesures des angles orientés suivants en degré :

$$\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{2\pi}{3}.$$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

S'entraîner

14 **Conversion**

1) Convertir les mesures des angles orientés suivants en degré :

$$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}, \frac{7\pi}{8} \text{ et } \frac{\pi}{4}.$$

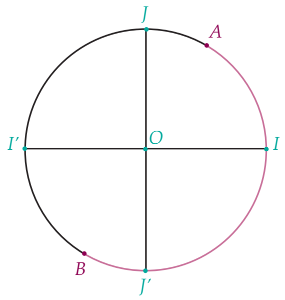
2) Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

15 Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels suivants :

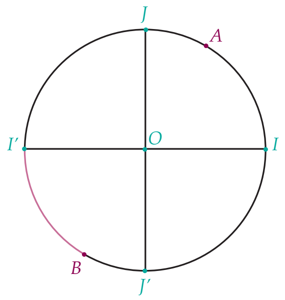
$$-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{17\pi}{6}.$$

16 Soit A le point-image de $\frac{\pi}{3}$ et B le point-image de $-\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'ensemble des nombres réels compris dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ dont les points-images forment l'arc rouge (extrémités comprises).

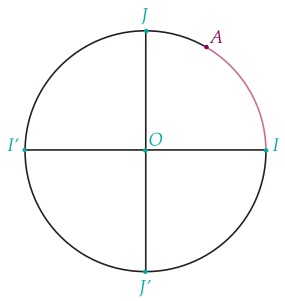
1)



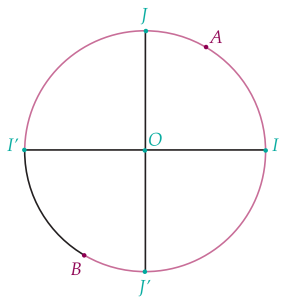
3)



2)



4)



17 **Intervalles**

Représenter en rouge sur le cercle trigonométrique, orienté dans le sens direct, l'arc de cercle correspondant aux points-images des nombres réels compris dans :

1) $\left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ 0\right]$

2) $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]$

3) $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}\ ;\ 2\pi\right]$

4) $\left[-\frac{2\pi}{3}\ ;\ -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

Mesures d'un angle orienté

18 On considère les points A , B, C, D et E, respectivement point-images des nombres suivants :

$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

Donner une mesure des angles orientés suivants :

1) $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right)$

5) $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}\right)$

6) $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}\right)$

19 $ABCD$ est un carré de centre O.

Donner une mesure des angles orientés suivants :

1) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD}\right)$

5) $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$

6) $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

20 Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $-\frac{7\pi}{5}$

2) $\frac{18\pi}{4}$

3) $\frac{4\pi}{3}$

4) $\frac{7\pi}{10}$

21 ► MÉTHODE 2 p. 196

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $-\frac{21\pi}{4}$

2) $\frac{37\pi}{7}$

3) $-\frac{2\pi}{3}$

4) $\frac{23\pi}{10}$

22 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que :

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

Donner la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $(-\vec{u}, -\vec{v})$

2) $(\vec{v}, \vec{u})$

3) $(-\vec{v}, -\vec{v})$

4) $(-\vec{v}, \vec{u})$

23 Soit A, B et C trois points tels que :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{5}$.

Donner la mesure principale des angles orientés suivants :

1) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right)$

2) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

4) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right)$

24 **Mesure principale** ALGO

1) a) Expliquer pourquoi on peut distinguer trois cas quand on calcule la mesure principale d'un angle orienté.

b) Un de ces trois cas est très simple à gérer. Pourquoi ?

2) Compléter l'algorithme ci-dessous.

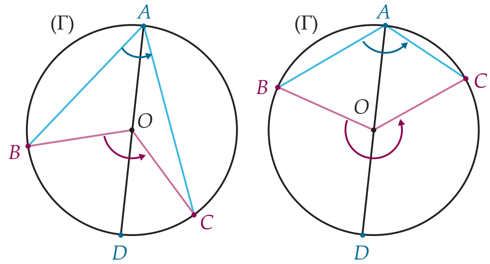
```
Algorithme : Mesure principale
Liste des variables utilisées
x : nombre réel
Traitements
Demander x
Si x> ... alors
    Tant que x>....
        Donner à x la valeur .....
    Fin Tant que
Sinon
    Si x ≤ ... alors
    Tant que x ≤  ...
        Donner à x la valeur .....
    Fin Tant que
    Fin Si
Fin Si
Affichage
Afficher « la mesure principale est : »
Afficher x
Fin de l'Algorithme
```

3) En pratique, cet algorithme n'est pas facile à utiliser car on connaît en général la mesure d'un angle orienté sous la forme $x = \dfrac{a\pi}{b}$.
Modifier l'algorithme précédent pour qu'il demande à l'utilisateur les deux nombres a et b, puis déterminer la mesure principale $\dfrac{a'\pi}{b'}$.

25 Soit A, B, C et D des points du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.

26 A, B, C et D sont des points tels que :
$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, BCA est rectangle en B et direct (c'est-à-dire) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.
Montrer que les points A, C et D sont alignés.

27 Soit A, B et C trois points d'un cercle (Γ) de centre O. Soit D le point diamétralement opposé à A sur (Γ).



1) a) Montrer en utilisant la relation de Chasles que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

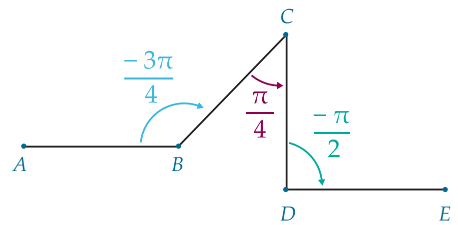
b) Exprimer que la somme des angles du triangle AOB est égale à π.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$.

2) On peut montrer de même que :
$\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)$.
En déduire que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

3) Compléter l'énoncé du théorème :
« L'angle au .... est égal au double de l'angle inscrit interceptant le même .... »

28 $ABCDE$ est la ligne brisée ci-dessous.



Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

29 **Problème de construction**

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.

1) Construire le point C tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $AB = AC$.

2) Construire le point D tel que ACD soit un triangle équilatéral et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

3) Construire le point E tel que $\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{11\pi}{12}$ et $DE = 3$ cm.

4) Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

5) Construire F tel que A, F et C soient alignés et $\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$.

6) Démontrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

Cosinus et sinus d'un nombre réel

30 Donner les coordonnées des points A, B et C points-images des nombres réels $\frac{\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

31 Donner les coordonnées des points A, B et C points-images des nombres réels $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.

32 ► MÉTHODE 3 p. 198

Soit x un nombre réel tel que $\cos x = \frac{1}{4}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$. Calculer $\sin x$.

33 Soit x un nombre réel tel que $\sin x = \frac{1}{5}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. Calculer $\cos x$.

34 CALC

Un élève a obtenu les deux écrans suivants avec sa calculatrice.

```
sin⁻¹((√(5)+1)/4)
             .9424777961
Ans/π►Frac
                    3/10
■
```

```
sin⁻¹(3/2)
                   Error
■
```

1) a) Quelle équation a-t-il résolue dans l'écran de gauche ? Quelle solution de cette équation est donnée par la calculatrice ?

b) L'équation précédente a-t-elle d'autres solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$?

2) Pourquoi a-t-il obtenu une erreur dans l'écran de droite ?

35 CALC

Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1) $\sin x = -0{,}8$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$

2) $\sin x = 1{,}2$ et $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

36 CALC

Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1) $\cos x = 2{,}1$ et $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right[$

37 ALGO

Le but de l'algorithme est de déterminer l'angle orienté x quand on connaît son cosinus c et le cadran n $(1 \leq n \leq 4)$ correspondant à x.

1) Compléter l'algorithme ci-dessous.

```
Algorithme : calcul du réel x
Liste des variables utilisées
c, x : nombres réels
n : nombre entier
Traitements
Demander c
Demander n
Si n = 1
   Donner à x la valeur cos⁻¹(c)
Sinon si n = 2
   Donner à x la valeur ..............
Sinon si n = 3
   Donner à x la valeur ..............
Sinon si n = 4
   Donner à x la valeur ..............
Fin Si
Affichage
Afficher « l'angle orienté est : »
Afficher x
Fin de l'algorithme
```

2) Modifier l'algorithme précédent pour qu'il donne l'angle orienté x en connaissant son sinus noté s et le cadran n.

38 Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont nulles quel que soit x réel ?

1) $\cos(x+\pi) - \cos(-x)$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x)$

3) $\sin(2\pi - x) + \sin(\pi + x)$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(4\pi + x)$

39 Calculer quel que soit x réel l'expression : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

40 Donner la symétrie qui transforme le point-image du nombre réel x en le point-image du nombre réel y.

1) $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{7\pi}{6}$

2) $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = -\frac{\pi}{4}$

3) $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = -\frac{\pi}{3}$

4) $x = -\frac{3\pi}{8}$ et $y = -\frac{5\pi}{8}$

41 ► MÉTHODE 4 p. 200

1) Calculer $\sin \dfrac{5\pi}{4}$, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin \dfrac{5\pi}{6}$.

2) On sait que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

En déduire $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

42 En utilisant les angles associés, calculer la valeur exacte des coordonnées du point-image M des nombres réels suivants :

1) $\dfrac{3\pi}{4}$ **3)** $\dfrac{13\pi}{4}$

2) $-\dfrac{\pi}{6}$ **4)** $-\dfrac{2\pi}{3}$

43

1) Calculer $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

2) En déduire $\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

44 On sait que $\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

En déduire :

1) $\cos \dfrac{11\pi}{12}$ **3)** $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

2) $\sin \dfrac{5\pi}{12}$ **4)** $\cos \dfrac{13\pi}{12}$

45 ► MÉTHODE 5 p. 201

Calculer $\cos(2x)$ dans les cas suivants.

1) $\cos x = -\dfrac{1}{4}$ **2)** $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

46 Calculer $\sin 2x$ dans les cas suivants.

1) $\sin x = \dfrac{1}{3}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$

2) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[$

47 Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

48 Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1) $\sin\left[2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\right] - \cos(2\pi - x)$

2) $\sin^2(\pi+x) - \cos\left[2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]$

49 ► MÉTHODE 6 p. 201

On considère l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Résoudre cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants.

2) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

50 ► MÉTHODE 7 p. 202 CALC

L'écran suivant obtenu avec la calculatrice correspond à la résolution d'une équation.

```
sin⁻¹(1/2)
         .5235987756
Ans/π►Frac
                 1/6
```

1) a) De quelle équation s'agit-il ?

b) Quelle est la solution obtenue ?

2) Résoudre cette équation dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

51

1) Résoudre l'équation $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ dans $\mathbb{R}$.

2) Préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]0\,;\,4\pi]$

52 Montrer que l'équation $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ a quatre solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ puis placer sur le cercle trigonométrique les quatre points correspondants.

53 On considère l'inéquation $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

3) Vérifier le résultat obtenu en définissant comme fonction le booléen $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ qui vaut 1 en x si $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$ et 0 sinon.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■cos(X)≥-1/2
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
 Xmin=-3.141592…
 Xmax=3.1415926…
 Xscl=.52359877…
 Ymin=-.5
 Ymax=1.5
 Yscl=1
↓Xres=1
```

où 3.141592… correspond à π et .52359877… correspond à $\dfrac{\pi}{6}$.

54 ► MÉTHODE 8 p. 202

On considère l'inéquation $\cos x > 0$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

55 On considère l'inéquation $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

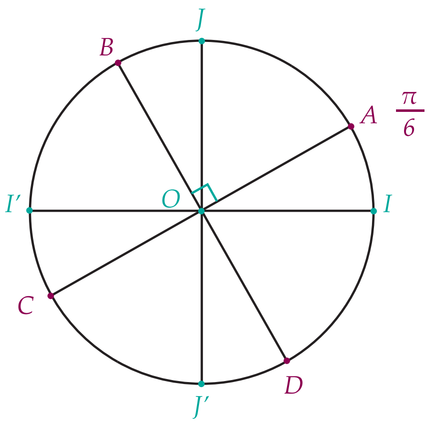
56 On considère l'inéquation $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

2) Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Approfondir

57 Déterminer une équation dont les solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont des nombres réels dont les points-images sont les points A, B, C et D de la figure ci-dessous.



58 Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2} \\ \sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

59 Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

60 On souhaite résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

1) On effectue un changement de variable.
On pose $X = \cos x$ avec $x \in [-1\ ;\ 1]$.
- **a)** Quelle équation du second degré est équivalente à **(1)** ?
- **b)** Montrer que son discriminant peut s'écrire : $4(1-\sqrt{3})^2$.
- **c)** Déterminer les solutions de cette équation du second degré.

2) En déduire les solutions de l'équation **(1)** dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

61 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(\sin 2x + 1)(2\cos x + \sqrt{2}) = 0.$$

62 **Triangle magique**

L'objectif est de résoudre le système d'équations dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

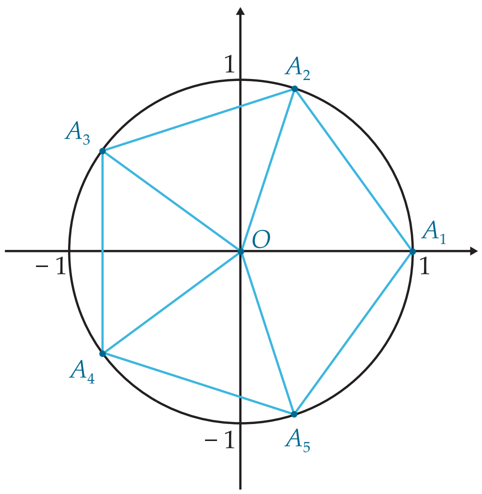
1) Première méthode
- **a)** Montrer que les solutions de l'équation $\cos 3x = 1$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent :
$x = \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- **b)** Montrer que les solutions de l'équation $\sin 3x = 0$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent :
$x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- **c)** En déduire l'ensemble des solutions du système d'équations **(1)** dans $\mathbb{R}$.
- **d)** Quelles sont les solutions du système d'équations **(1)** dans $]-\pi\ ;\ \pi]$?

2) Seconde méthode
- **a)** En utilisant les formules d'addition, montrer les égalités suivantes, quel que soit x réel :
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
- **b)** Montrer que l'équation $\cos 3x = 1$ est équivalente à $4X^3 - 3X - 1 = 0$ en posant $X = \cos x$ ($X \in [-1\ ;\ 1]$).
- **c)** Montrer que pour tout nombre réel X :
$4X^3 - 3X - 1 = (X-1)(4X^2 + 4X + 1)$.
- **d)** En déduire les solutions de l'équation :
$4X^3 - 3X - 1 = 0$
et conclure sur les solutions de l'équation :
$\cos 3x = 1$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
- **e)** Vérifier que les solutions trouvées en **2)d)** sont également solutions de $\sin 3x = 0$.

3) Représentation graphique
- **a)** Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels solutions du système.
On les notera I, A et B.
- **b)** Quelle est la nature du triangle IAB ?
Justifier.

63 Pentagone régulier

Soit $A_1A_2A_3A_4A_5$ le pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.



On a donc $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}) = \ldots = (\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_4}) = (\overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_5}) = (\overrightarrow{OA_5}, \overrightarrow{OA_1}) = \dfrac{2\pi}{5}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 dans le repère ci-dessus.

b) Calculer $\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{4\pi}{5} + \sin\dfrac{6\pi}{5} + \sin\dfrac{8\pi}{5}$.

c) En déduire que le vecteur :
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5}$
a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel que l'on déterminera.

2) En fait, on peut montrer que :
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = \vec{0}$
et donc $a = 0$. On l'admettra ici.

a) En déduire que $1 + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 2\cos\dfrac{4\pi}{5} = 0$.

b) En déduire que $4\cos^2\dfrac{\pi}{5} + 2\cos\dfrac{2\pi}{5} - 1 = 0$.

c) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est donc une solution de l'équation du second degré $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

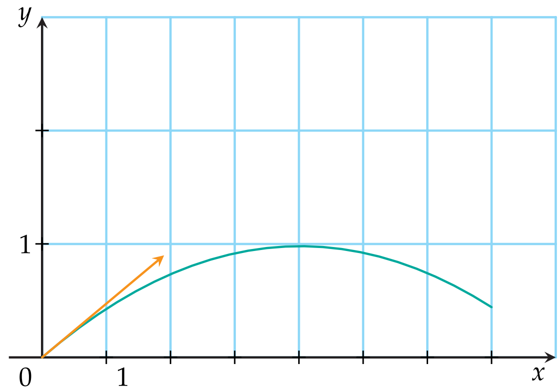
64 Portée maximale CALC

La portée d'un projectile correspond à la longueur entre la position d'où le projectile est lâché par le système lui donnant son impulsion, et la position du point de chute du projectile. La portée est donc la projection horizontale d'une trajectoire courbe.

À l'instant $t = 0$, l'objet est lancé depuis le sol et on note α l'angle initial du projectile avec l'horizontale $\left(\alpha \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$. On suppose que le projectile est lancé à la vitesse $v = 10$ m.s^{-1}. On néglige les frottements de l'air et on suppose que l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

On peut montrer que la trajectoire du projectile est décrite par l'équation $y = \dfrac{-0{,}049}{\cos^2\alpha}x^2 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos(\alpha)}x$ où x et y sont les coordonnées du projectile dans le repère choisi.

Exemple : Trajectoire pour $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$



1) Quelle est la nature de cette courbe ?

2) On note OP la distance obtenue quand le projectile retombe à terre.

a) Montrer que :
$$OP = \frac{1}{0{,}049} \times \cos\alpha \times \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2(\alpha)}\right).$$

b) En déduire $OP = \dfrac{1}{0{,}049} \times \sin 2\alpha$.

c) Quel angle permet d'avoir une portée maximale ?

3) En fait, dans le cas général, on a :
$y = \dfrac{-1}{2a\cos^2\alpha}x^2 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x + h$ où $a = \dfrac{v^2}{g}$.
Deux lanceurs du poids réalisent chacun un lancer dont les caractéristiques sont les suivantes :

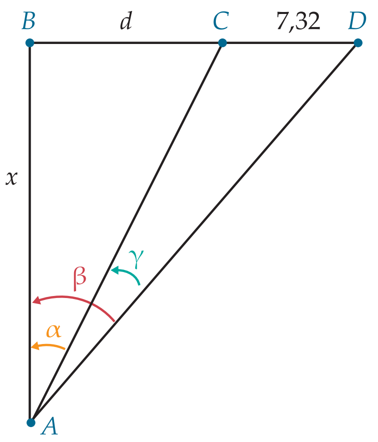
	α (deg)	v (m.s^{-1})	h (m)
Lanceur 1	43	13,7	2,62
Lanceur 2	41	13,8	2,45

À l'aide de la calculatrice, déterminer lequel a lancé le plus loin le poids.

65 Angle de tir maximal

INFO

Lors d'un match de football, un joueur s'avance vers le but avec l'intention de tirer. Il est décalé de la distance $d = BC$ mètres latéralement par rapport au poteau de but le plus proche C et se trouve à x mètres du bord du terrain B sur la ligne de corner. La largeur des buts est la distance $CD = 7{,}32$ m.



On souhaite déterminer à quelle distance le joueur aura l'angle de tir $\gamma = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ le plus grand pour réussir son tir.

1) Conjecture

On fixe d = 10 m.

a) Avec un logiciel de géométrie, réaliser la figure. (On pourra créer le point A mobile sur la droite perpendiculaire à (CD) passant par B.)

b) Quelle est la valeur maximale pour γ ?

c) À quelle distance cela correspond-il pour le tireur ?

2) Cas général

a) Montrer que α s'exprime en fonction de x et d.

b) Application numérique avec $d = 5$ m.

c) Compléter la phrase suivante : « Dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, quand γ augmente, $\cos\gamma$ .... ».

d) Réaliser une table de valeurs de la fonction qui à x associe le cosinus de l'angle γ pour $0 \leq x \leq 15$.

e) Donner une mesure de l'angle de tir maximal à 0,1 degré près.

3) Pour aller plus loin

En considérant la fonction g définie par :

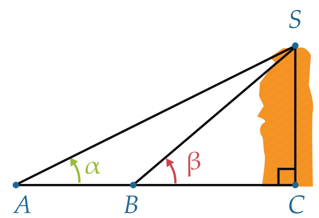
$$g(d) = \frac{x^2 + (d + 7{,}32) \times d}{\sqrt{x^2 + (d + 7{,}32)^2} \times \sqrt{d^2 + x^2}}$$

peut-on justifier que l'angle de tir diminue quand on s'écarte latéralement du but, c'est-à-dire quand d augmente, x restant fixe ?

66 Prendre la tangente

CALC

Un navigateur passant devant le Cap Horn par temps calme décide de mesurer la hauteur SH de ce rocher.



On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Le navigateur a mesuré les angles géométriques, puis α et β ainsi que la distance AB entre les deux points de mesure.

1) Expression de SH avec tan

a) Montrer que $SH = (AB + BH)\tan\alpha$.

b) En déduire que $SH = AB\dfrac{\tan\alpha \times \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$.

2) Expression de SH avec sin

a) Montrer que $\tan\beta - \tan\alpha = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

b) En conclure que $SH = AB\dfrac{\sin\alpha \times \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$.

3) Application numérique

En utilisant l'expression obtenue en **2) b)** calculer la hauteur SH avec les données suivantes :
$AB = 200$ m, $\alpha = 12{,}9°$, $\beta = 14{,}4°$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Repérer un point sur le cercle trigonométrique
- Calculer une mesure d'un angle orienté
- Déterminer la mesure principale d'un angle orienté
- Résoudre une équation trigonométrique
- Calculer le cosinus et le sinus de nombres réels et d'angles orientés
- Utiliser les formules d'addition, de soustraction et de duplication

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \vec{v})$.

67 Une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, -\vec{v})$ est :

ⓐ $-\frac{\pi}{6}$ ⓑ $\frac{5\pi}{6}$ ⓒ $\frac{7\pi}{6}$ ⓓ $\frac{-5\pi}{6}$

68 $(\vec{v}, \vec{u})$ a pour mesure :

ⓐ $-\frac{\pi}{6}$ ⓑ $\frac{13\pi}{6}$ ⓒ $-\frac{23\pi}{6}$ ⓓ $\frac{7\pi}{6}$

69 Une mesure de l'angle orienté $(2\vec{u}, -2\vec{v})$ est :

ⓐ $-\frac{2\pi}{6}$ ⓑ $\frac{5\pi}{6}$ ⓒ $\frac{7\pi}{6}$ ⓓ $\frac{\pi}{3}$

70 Une mesure de l'angle orienté $(-\vec{u}, -2\vec{v})$ a pour mesure :

ⓐ $\frac{\pi}{6}$ ⓑ $\frac{13\pi}{3}$ ⓒ $-\frac{23\pi}{6}$ ⓓ $\frac{7\pi}{3}$

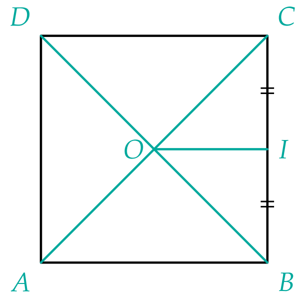
71 Une autre mesure de $\frac{\pi}{6}$ est :

ⓐ $\frac{5\pi}{6}$ ⓑ $\frac{25\pi}{6}$ ⓒ $-\frac{15\pi}{6}$ ⓓ $-\frac{13\pi}{6}$

72 Les coordonnées du point M telles que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \vec{v})$ sont :

ⓐ $\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ⓑ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ⓒ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ⓓ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$ABCD$ est un carré de centre O et I est le milieu de $[BC]$.



73 L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{\pi}{4}$ (c) $\dfrac{5\pi}{4}$

(b) $-\dfrac{\pi}{4}$ (d) $\dfrac{\pi}{2}$

74 L'angle orienté $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IC})$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $-\dfrac{\pi}{2}$ (c) $\dfrac{3\pi}{2}$ (d) π

75 L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\dfrac{3\pi}{2}$ (d) 2π

76 L'angle orienté $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OI})$ a pour mesure :

(a) $-\dfrac{3\pi}{2}$ (b) $\dfrac{3\pi}{4}$ (c) $\dfrac{3\pi}{2}$ (d) $-\dfrac{3\pi}{4}$

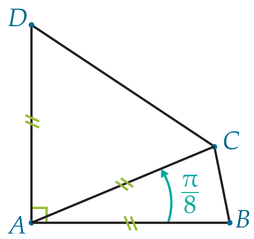
77 L'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}\right)$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $-\dfrac{\pi}{4}$ (c) $\dfrac{5\pi}{4}$ (d) $-\dfrac{3\pi}{4}$

78 L'angle orienté $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AO}\right)$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{\pi}{4}$ (b) $\dfrac{3\pi}{4}$ (c) $\dfrac{5\pi}{4}$ (d) $-\dfrac{3\pi}{4}$

$ABCD$ est le quadrilatère ci-contre.
$AB = AC = AD = 1$.



79 L'angle orienté $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{3\pi}{8}$ (c) $\dfrac{5\pi}{8}$

(b) $-\dfrac{3\pi}{8}$ (d) $-\dfrac{5\pi}{8}$

80 L'angle orienté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{5\pi}{8}$ (b) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$ (c) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}$ (d) $\dfrac{3\pi}{8}$

81 L'angle orienté $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$ a pour mesure :

(a) $\dfrac{5\pi}{16}$ (b) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}$ (c) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}$ (d) $\dfrac{3\pi}{8}$

82 L'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ a pour mesure :

(a) $\frac{7\pi}{16}$ (b) $-\frac{7\pi}{16}$ (c) $\frac{3\pi}{8}$ (d) $\frac{7\pi}{8}$

83 À quelle(s) expression(s) est égal $\cos\frac{\pi}{4}$?

(a) $2\cos\frac{\pi}{8}$ (b) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$ (c) $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}$ (d) $1 - 2\cos^2\frac{\pi}{8}$

84 à quelle(s) expression(s) est égal $\sin\frac{\pi}{4}$?

(a) $2\sin\frac{\pi}{8}$ (b) $2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}$ (d) $2\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}$

85 À quelle(s) expression(s) est égal $\cos\frac{\pi}{8}$?

(a) $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$ (b) $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ (c) $\sin\left(\frac{-\pi}{8}\right)$ (d) $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

86 L'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$:

(a) $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$ (b) $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{4}$ (c) $x = \frac{3\pi}{4}$ et $x = -\frac{3\pi}{4}$ (d) $x = -\frac{3\pi}{4}$ et $x = -\frac{\pi}{4}$

87 L'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions dans $\mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{Z}$) :

(a) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ (b) $x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ (c) $x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $x = \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$ (d) $x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $x = -\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$

88 L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$:

(a) $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{11\pi}{6}$ (b) $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = -\frac{\pi}{6}$ (c) $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = -\frac{\pi}{3}$ (d) $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{2\pi}{3}$

89 L'équation $\cos x = 0$ a pour solutions $S = \ldots$:

(a) $x = \frac{\pi}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ (b) $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$ (c) $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$ (d) $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ dans $[0\,;\,2\pi[$

90 L'inéquation $\sin x > 0$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'intervalle :

(a) $]0\,;\,\pi]$ (b) $]-\pi\,;\,0]$ (c) $]0\,;\,\pi[$ (d) $]-\pi\,;\,0[$

91 L'inéquation $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions dans $[0\,;\,2\pi[$ l'ensemble $S = \ldots$:

(a) $\left]\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right[$ (b) $\left]-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{6}\right[$ (c) $\left]\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right[$ (d) $\left]0\,;\,\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{6}\,;\,2\pi\right[$

92 L'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'ensemble $S = \ldots$:

(a) $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$ (b) $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$ (c) $\left]\frac{5\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}\right[$ (d) $\left[-\frac{3\pi}{4}\,;\,-\frac{\pi}{4}\right]$

Travaux pratiques

TP 1 Les fonctions trigonométriques

INFO

1 Mobiliser ses connaissances sur le cosinus

Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$									

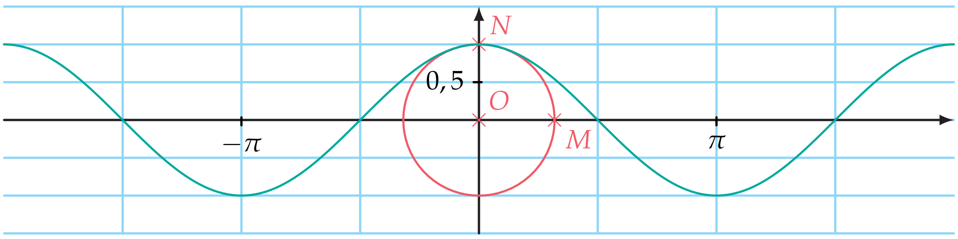
On peut définir une fonction qui à un nombre réel x, correspondant à un angle en radian, associe le cosinus de ce nombre réel.

2 Courbe représentative de la fonction cosinus

1) Se placer en mode radians (Options/Avancé/Radian) et régler sur l'axe des abscisses la distance entre nombres de la graduation à $\dfrac{\pi}{2}$.
Créer le cercle trigonométrique de centre O et passant par $I(1\ ;\ 0)$.
Créer le curseur α variant entre -2π et 2π.

2) Créer le point M de coordonnées $(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$. M est situé sur le cercle trigonométrique.
Créer le point N de coordonnées $(\alpha\ ;\ \cos\alpha)$.

3) Activer la trace du point N qui dépend du curseur α.
On visualise alors la courbe représentative C de la fonction $x \mapsto \cos x$, appelée fonction cosinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.



3 Étude de la fonction cosinus

1) Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude de cette fonction à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ et même à $[0\ ;\ \pi]$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
On considère l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Tracer la droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire les solutions de l'équation dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ puis dans l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

4 Pour aller plus loin

Reprendre la procédure précédente pour visualiser la courbe représentative C de la fonction $[0\ ;\ 2\pi]$, appelée fonction sinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

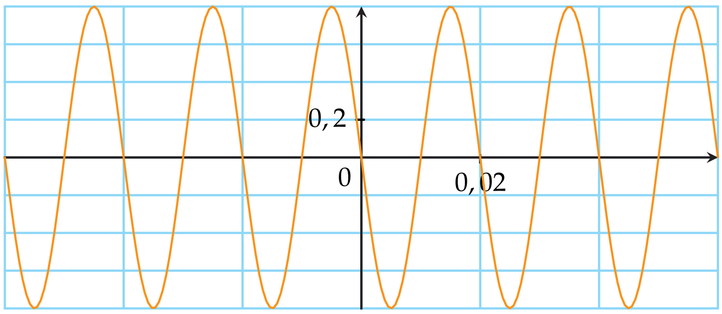
1) Dresser le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

2) Quelle translation permet d'obtenir la fonction sinus à partir de la fonction cosinus ?

3) Quelle formule du cours explicite cette translation ?

TP 2 Monte le son

Un microphone enregistre un signal sonore périodique qui est représenté sur l'écran d'un oscilloscope comme le montre la figure suivante. La courbe de la pression acoustique P, mesurée en Pascal (Pa), est représentée en fonction du temps.



1 Analyse du signal

1) Le signal enregistré est-il périodique ? Lire sa période T en seconde.

2) Calculer la fréquence f du signal (*rappel* : $f = \frac{1}{T}$).

3) Quelle est la valeur maximale prise par la fonction P ? On note ce nombre A.

4) Donner l'expression de P sous la forme $P(t) = A \times \cos(2\pi f t + \phi)$ où ϕ est le déphasage du signal.

2 Avec un logiciel de géométrie

On pose $\phi = \frac{n\pi}{10}$.

1) Créer un curseur appelé n entre -10 et 10 avec un pas de 1.

2) Entrer la fonction P dans la barre de saisie sous la forme obtenue en **1. 4)** :
$P(t) = A \times \cos\left(2\pi f t + \frac{n\pi}{10}\right)$.

3) Pour quelle valeur de n obtient-on la courbe observée à l'oscilloscope ?

4) Calculer $P(0)$, puis $P(T)$.

5) Déterminer le signal acoustique $Q(t)$ qui permettrait de masquer le premier, c'est-à-dire tel que $P(t) + Q(t) = 0$.

3 Résolution algébrique

On souhaite savoir pour quels instants t la pression acoustique du signal $P(t)$ est supérieure à 0,3 Pa sur une période.

1) Résoudre l'équation $\cos x > \frac{1}{2}$ pour $x \in]-\pi\,;\,\pi]$.

2) En déduire les solutions de l'équation $A \times \cos(2\pi f t + \phi) > 0{,}3$ où A, f et ϕ sont les nombres obtenus à la **partie 2**.

Travaux pratiques

TP 3 Collision

INFO

Soit $(O\ ;\ I, J)$ un repère orthonormé. L'unité est le mille nautique. 1 mn = 1 852 m.
Un point M est repéré dans le repère $(O\ ;\ I, J)$ par ses coordonnées cartésiennes : son abscisse x et son ordonnée y. Les angles orientés permettent également de décrire la position d'un point dans le plan.
Un couple (r, α), formé par la distance $r = OM$ et α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, constitue les coordonnées polaires du point M. Un employé de marine dont le bateau est au mouillage en O surveille au radar deux navires de pêche l'*Avel Diskan* (A) et le *Breizh Nevez* (B).

1 Radar et coordonnées polaires

1) Calculer les coordonnées cartésiennes des deux bateaux situés aux points A et B, définis respectivement par les coordonnées polaires $\left(3\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\left(4\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2) Calculer la distance AB.

2 Trajectoire des deux bateaux

Un employé de marine dont le bateau est au mouillage en O surveille au radar deux navires de pêche l'*Avel Diskan* et le *Breizh Nevez* qui occupent successivement les positions A_n et B_n, $0 \leq n \leq 36$. Les deux bateaux se déplacent sur l'écran du radar suivant les coordonnées suivantes : $A_n\left(3 - \dfrac{n}{20}\ ;\ \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{n\pi}{1\,000}\right)$ et $B_n\left(4 - \dfrac{n}{10}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{n\pi}{54}\right)$.

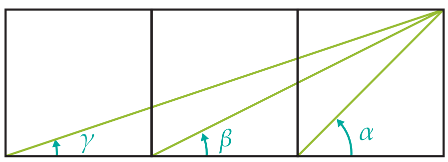
1) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, visualiser les positions successives des deux bateaux.

2) Écrire un algorithme qui donne l'alerte lorsque que A et B sont trop proches, à moins de trois encablures l'un de l'autre : $AB < 0,3$ mn.

Récréation, énigmes

Trois à la suite

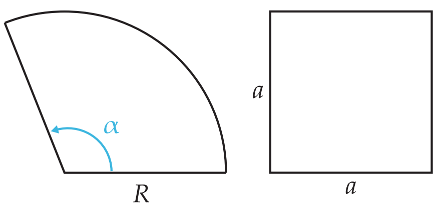
Les côtés des trois carrés adjacents suivants ont pour longueur 1.



1) Conjecturer avec un logiciel de géométrie une mesure de l'angle géométrique $\alpha + \beta + \gamma$.
2) Démontrer ce résultat (*piste* : utiliser les formules de duplication pour $\beta + \gamma$).

Carré d'angle

Déterminer le rayon R et l'angle α du secteur angulaire ci-contre pour qu'il ait même aire et même périmètre que le carré de côté a, dont la longueur a est donnée :



1) dans le cas où $R = a$;
2) dans le cas général.

GÉOMÉTRIE

3

Produit scalaire dans le plan

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- Calculer la norme d'un vecteur
- Utiliser la relation de Chasles
- Savoir introduire un repère convenablement choisi
- Déterminer des angles orientés
- Connaître les valeurs remarquables du cosinus et du sinus
- Faire le lien entre équation de droite et vecteur directeur

Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

1 Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé. Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

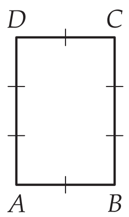
1) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.

2) Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$.

3) $\|-5\vec{u}\| = -5\,\|\vec{u}\|$

2 Exprimer les deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{RC}$.

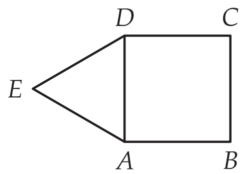
3 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB = 2$, $AD = 3$.



1) Introduire un repère orthonormé conservant les distances de l'énoncé, c'est-à-dire dans lequel $AB = 2$ unités graphiques et $AD = 3$ unités graphiques.

2) Donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.

4 On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un carré et ADE est équilatéral.



1) Donner une mesure en radians des angles orientés suivants.

a) $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$

b) $\left(\overrightarrow{DB}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)$

c) $\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$

d) $\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{DE}\right)$

2) Donner $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$.

5 Donner un vecteur directeur de :

1) la droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$

2) la droite d_2 d'équation $2x - 7y + 5 = 0$

3) la droite d_3 d'équation $x - 5 = 0$

Voir solutions p. 333

Activités d'approche

ACTIVITÉ 1 Une statue pour Évariste

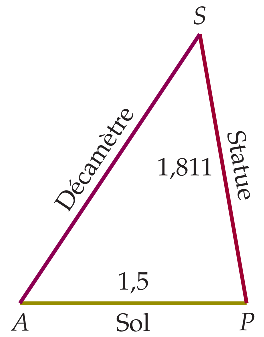
INFO

Partie 1 : Perpendicularité sans équerre

Dans la cour d'un lycée, on souhaite installer une statue du mathématicien Évariste Galois. Celle-ci mesure 1,811 m, en hommage à son année de naissance, 1811.

À cause de la forme de la statue, on ne peut pas utiliser d'équerre afin de l'ériger perpendiculairement au sol.

Sophie propose alors d'accrocher un décamètre (**gradué en mm**) au sommet S du crâne de « Galois » et de mesurer la distance entre ce point et un autre point A situé au sol, à 1,5 m du pied de la statue P, comme sur le graphique ci-dessous.



Un décamètre est un ruban gradué de 10 m de long.

Elle affirme qu'ensuite, le calcul de la quantité $p = AS^2 - AP^2 - PS^2$, où AS, AP et PS sont exprimées en mètre, lui permettra de répondre au problème posé.

1) **a)** Déterminer quelle doit être la valeur de p pour que la statue soit perpendiculaire au sol.
b) Quelle serait alors la mesure AS ?

2) Expliquer pourquoi il n'est pas possible d'obtenir une mesure de AS aussi précise avec le décamètre.

3) **a)** Lors d'un premier essai, Sophie a mesuré $p = -4,089721$.
En déduire AS puis, en bleu, représenter la situation à l'échelle 1/10e sur une feuille de papier millimétré ou à petits carreaux.
b) Lors d'un deuxième essai, Sophie a mesuré $p = -2,289721$.
En déduire AS puis, en noir, représenter la situation sur le graphique précédent.

4) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et régler le nombre de décimales à 10.
- Créer deux points $A(0\,;\,0)$ et $P(1{,}5\,;\,0)$.
- Créer un cercle de centre P et de rayon 1,811.
- Créer un curseur b variant de 1,8 à 3 avec un pas de 0,001 puis créer le cercle de centre A et de rayon b.
- Créer S le point d'intersection des deux cercles, d'ordonnée positive.
- Créer le nombre p défini par $p = b^2 - 1{,}5^2 - 1{,}811^2$.
- Faire varier b de sorte que la « statue » soit « la plus perpendiculaire au sol possible ».

5) Recopier et compléter.
Plus p est proche de . . . . , plus la statue semble . . . .

6) En déduire la valeur de AS que doit mesurer Sophie sur le décamètre (dont la précision est le mm) pour avoir une statue la plus stable possible. Combien vaudra alors p ?

Partie 2 : Avec des vecteurs

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on définit leur produit scalaire, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

1) Tracer un vecteur $\vec{u}$ d'origine A et d'extrémité B puis un vecteur $\vec{v}$ d'origine B et d'extrémité C.

2) Exprimer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de AB, AC et BC.

3) **a)** Comment définiriez-vous des vecteurs orthogonaux (on pourra penser aux repères orthogonaux) ?

b) En vous inspirant de la partie précédente, expliquer pourquoi on dit que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ mesure le défaut d'orthogonalité entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

DÉBAT 2 Un problème de définition

Annie et Haohan ne sont pas d'accord !
Le professeur d'Annie a défini le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan par la formule :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

En revanche, le professeur d'Haohan affirme que le produit scalaire est défini de la façon suivante :

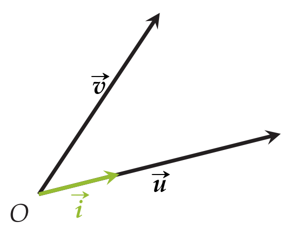
Dans un repère orthonormé, le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Annie et Haohan sont-ils réconciliables ?

ACTIVITÉ 3 Because sinus

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on a tracé des représentants ci-dessous à partir d'un point O.



1) Soit $\vec{i}$, le vecteur de norme 1, colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ ci-contre. Exprimer $\vec{i}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\|\vec{u}\|$.

2) On introduit alors un vecteur $\vec{j}$ tel que le repère $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$ soit orthonormé direct. Reproduire la figure et y placer $\vec{j}$.

3) Donner les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4) **a)** Tracer le cercle trigonométrique associé au repère $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) Caractériser le vecteur $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ en termes de direction et de norme puis tracer son représentant d'origine O.

c) En déduire les coordonnées de $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ puis celles de $\vec{v}$ dans $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5) En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

Cours - Méthodes

Dans tout ce chapitre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent des vecteurs du plan.

1. Définition du produit scalaire et orthogonalité

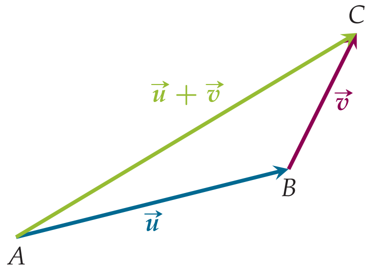
DÉFINITION

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Remarques :

- Concrètement, cela correspond à la moitié de l'écart relatif entre AC^2 et $AB^2 + BC^2$ sur le graphique ci-dessous.



- Le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais **un nombre réel**.

Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Correction

On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(8^2 - 6^2 - 5^2\right) = \frac{3}{2}.$

PROPRIÉTÉ

1) Le produit scalaire est **commutatif**, c'est-à-dire que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

2) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

3) $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est également noté $\vec{u}^2$, appelé « **carré scalaire** de $\vec{u}$ ».
On a alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

PREUVE

1) On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right) = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

2) Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{0}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{0}\right\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}\|^2 - 0^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = 0$.
Il en va de même si $\vec{v} = \vec{0}$.

3) $\vec{u}^2 = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|2\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left((|2|\,\|\vec{u}\|)^2 - 2\|\vec{u}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(4\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(2\|\vec{u}\|^2\right) = \|\vec{u}\|^2.$

DÉFINITION

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, ce que l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque : Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur du plan.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

Remarques :

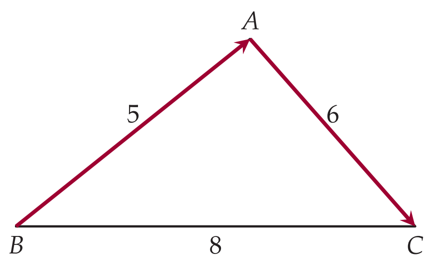
- Concrètement, cela veut dire que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux quand ils « forment un angle droit ».
- Pour $k \neq 0$, on sait que $(\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$ ou $-(\vec{u}; \vec{v})$ (2π) donc si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

PREUVE Soit A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ comme sur le graphique de la première remarque.
On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ainsi :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right)$.
Il en résulte que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right) = 0$
$\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en B autrement dit $(\vec{u}; \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Correction

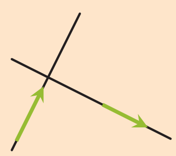
D'après l'exemple précédent, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2} \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux.
Cela veut dire que, sur la figure ci-contre, les droites (BA) et (AC) ne sont pas perpendiculaires donc que ABC n'est pas rectangle en A.



Remarque : Pour deux vecteurs de norme fixée, on dit que le produit scalaire est une mesure du **défaut d'orthogonalité** de ces deux vecteurs : plus il est proche de 0, plus l'angle formé par ces deux vecteurs « semble droit ».

PROPRIÉTÉ : Corollaire

Deux droites du plan sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.



2. Produit scalaire et coordonnées

Dans ce paragraphe, toutes les coordonnées sont données dans un repère **orthonormé** du plan.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

PREUVE Remarquons préalablement que $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}^2 - \sqrt{x^2+y^2}^2 - \sqrt{x'^2+y'^2}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x+x'\right)^2 + \left(y+y'\right)^2 - \left(x^2+y^2\right) - \left(x'^2+y'^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right) = \frac{1}{2} \times 2(xx'+yy') = xx'+yy'.
\end{aligned}$$

REMARQUE : Cette formule n'est valable **que dans un repère orthonormé**.

MÉTHODE 1 Étudier la perpendicularité de deux droites

► Ex. 19 p. 229

Exercice d'application

Soit quatre points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(5\ ;\ 0)$, $C(3\ ;\ 4)$ et $D(6\ ;\ 13)$ dans un repère orthonormé.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 6 \times 3 + (-2) \times 9 = 18 - 18 = 0.$$

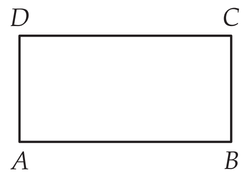
On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, vecteurs directeurs des deux droites, sont orthogonaux donc que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

MÉTHODE 2 Introduire un repère orthonormé pour calculer un produit scalaire

► Ex. 13 p. 228

Exercice d'application

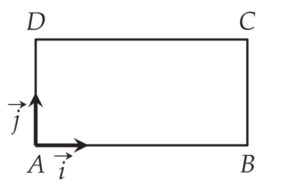
On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AC = 2$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On introduit $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ de sorte que le repère $\left(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ soit orthonormé et respecte les longueurs données par l'énoncé.



On a alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 + 0 \times 2 = 16.$$

3. Propriétés algébriques

La formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ permet de démontrer facilement les propriétés algébriques suivantes.

PROPRIÉTÉ

- Le produit scalaire est **distributif** par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.
  En particulier $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$.

PREUVE

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
  On a alors $\vec{v} + \vec{w}\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$ puis :
  $$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' = xx' + yy' + xx'' + yy'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$
- Voir exercice 30 page 230.

Remarques :

- Le produit scalaire est également distributif par rapport à la soustraction puisque :
  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} + (-\vec{w})) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (-\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + (-\vec{u} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Plus largement, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$.

Exemple Soit A, B, C et D quatre points du plan. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Correction

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ d'après la relation de Chasles.

PROPRIÉTÉ : Identités remarquables

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

PREUVE Démontrons le premier point :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \text{ par distributivité} \\ &= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \text{ par commutativité} \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

THÉORÈME : Application : Théorème de la médiane

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

PREUVE On se référera au **TP 3** page 243.

4. Autres expressions du produit scalaire

PROPRIÉTÉ

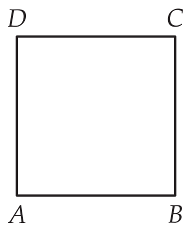
Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

REMARQUE : Pour la preuve de cette propriété, on se référera à **l'Activité 3** page 219.

Exemple

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 3.



Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On exprime d'abord ce produit scalaire en fonction de représentants des vecteurs de même origine A.

En effet, on sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, il en résulte donc que :

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \times AC \times \cos\left(\widehat{DAC}\right)$.

Comme, de plus, $AD = 3$, $AC = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $\cos\left(\widehat{DAC}\right) = \cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit que :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}^2}{2} = 9.$$

MÉTHODE 3 Déterminer un angle avec le produit scalaire

► Ex. 44 p. 231

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0\,;\,0)$, $B(5\,;\,1)$ et $C(2\,;\,4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC.

2) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
On donnera le résultat en degrés, arrondi à 0,1 près.

Correction

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 14$
- $AB = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$
- $AC = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2) De $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$, on déduit que

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{14}{\sqrt{26} \times 2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 52{,}1°$.

REMARQUE : Plus généralement, le produit scalaire et la relation de Chasles permettent de montrer le **théorème d'Al-Kashi** qui donne des relations entre les longueurs des côtés et les mesures des angles d'un triangle (voir **TP 4** page 244).

PROPRIÉTÉ

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés.

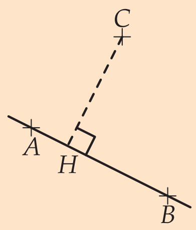
PREUVE

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \cos(0) = 1$ donc :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 1 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés, alors $\cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \cos(\pi) = -1$ donc :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-1) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

DÉFINITION

Dans le plan, on considère une droite (AB) et un point C extérieur à cette droite.

H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.



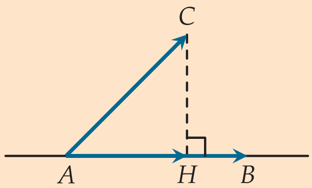
PROPRIÉTÉ

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

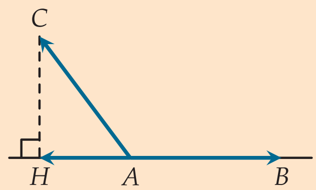
Plus précisément, si $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :

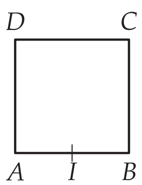


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

PREUVE D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ donc :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$
puisque, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ étant orthogonaux par définition de H, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Exemple

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 2 et I le milieu de $[AB]$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI}$

Correction

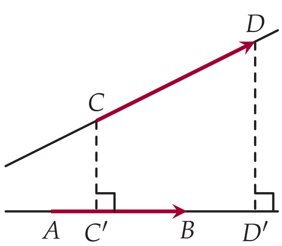
- B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 2^2 = 4.$$

- $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ et B est le projeté orthogonal de C sur (IA) donc :

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA \times IB = -1^2 = -1.$$

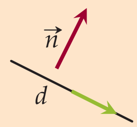
REMARQUE :
Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB).
On peut montrer (voir exercice **51** page 232) que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, où C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).



5. Vecteur normal à une droite

DÉFINITION

Dans le plan, on dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à une droite d s'il est orthogonal à un vecteur directeur de d.
$\vec{n}$ est alors orthogonal à tout vecteur directeur de d.



PROPRIÉTÉ

On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère deux réels a et b non tous les deux nuls.

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
- Réciproquement, une droite admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal a pour équation $ax + by + c = 0$ (où c est à déterminer).

PREUVE

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et d d'équation $ax + by + c = 0$. On sait que d admet $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur or $\vec{u} \cdot \vec{n} = -b \times a + a \times b = -ba + ab = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$, vecteur directeur de d : $\vec{n}$ est un vecteur normal à d.
- Soit une droite d admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et $A(x_A ; y_A)$ un point de d.
  Un point $M(x ; y)$ appartient à d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
  Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M \in d \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b = 0$
  $\Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$: la droite d a bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple

Donner un vecteur normal à la droite d d'équation $2x - 3y + 5 = 0$ dans un repère orthonormé.

Correction

$2x - 3y + 5 = 0$ est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 2$ et $b = -3$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à d.

MÉTHODE 4 Trouver une équation de droite avec un vecteur normal

▶ Ex. 65 p. 234

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\,;\,-4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Correction Il y a deux façons de procéder.

- Comme $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal à d, elle a pour équation $5x + 6y + c = 0$ où c reste à déterminer.
  De plus, $A \in d$ donc $5x_A + 6y_A + c = 0 \Leftrightarrow 5 \times 2 + 6 \times (-4) + c = 0 \Leftrightarrow -14 + c = 0$
  $\Leftrightarrow c = 14$: la droite d a donc pour équation $5x + 6y + 14 = 0$.
- $M(x\,;\,y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \times 5 + (y + 4) \times 6 = 0 \Leftrightarrow 5x + 6y + 14 = 0$.

6. Applications du produit scalaire

PROPRIÉTÉ : Équation de cercle

Dans un repère orthonormé du plan :

- le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r a pour équation $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$;
- le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

PREUVE

- $M(x;y)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow \Omega M=r\Leftrightarrow \Omega M^2=r^2$ (puisque ΩM et r sont positifs)
  $\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$.
- $M\in\mathscr{C}'\Leftrightarrow ABM$ est rectangle en M ou $M=A$ ou $M=B\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

MÉTHODE 5 Trouver une équation de cercle de diamètre donné

► Ex. 73 p. 235

Exercice d'application

Soit $A(2\,;\,3)$ et $B(5\,;\,-1)$ dans un repère orthonormé.
Déterminer une équation de $\mathscr{C}$, le cercle de diamètre $[AB]$.

Correction

$M(x\,;\,y)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ or $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\3-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\-1-y\end{pmatrix}$ donc :

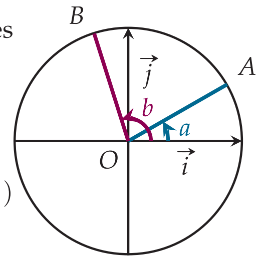
$M\in\mathscr{C}\Leftrightarrow(2-x)(5-x)+(3-y)(-1-y)=0\Leftrightarrow 10-2x-5x+x^2+(-3-3y+y+y^2)=0$
$\Leftrightarrow x^2-7x+y^2-2y+7=0$ qui est donc une équation de $\mathscr{C}$.

PROPRIÉTÉ : Formule d'addition du cosinus et du sinus

Soit a et b deux réels.

- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$
- $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

PREUVE Sur le cercle trigonométrique muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$, on place deux points A et B de sorte que $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)=a\ (2\pi)$ et $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)=b\ (2\pi)$.



- On a $\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\vec{i}\right)+\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)$ par la relation de Chasles puis $\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\vec{i}\right)+\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)=-\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)+\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OA}\right)$
  $=-b+a=a-b\ (2\pi)$.
  Ainsi, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=OB\times OA\times\cos\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)=\cos(a-b)$.
- D'autre part, par définition du sinus et du cosinus, on a $A(\cos(a);\sin(a))$ et $B(\cos(b);\sin(b))$ donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a)$.

Il en résulte que $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
Les autres formules se déduisent de la précédente (voir exercice 95 page 238).

Exemple Justifier que $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ puis calculer $\sin\frac{\pi}{12}$.

Correction

On a $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$ donc :

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

S'entraîner

Dans tous les exercices, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé du plan.

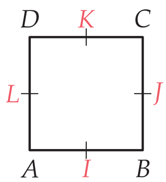
Activités mentales

1 Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec :

1) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 10$
2) $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{5}$ et $\vec{v} = \vec{u}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$
4) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$ (2π)
5) $\|\vec{u}\| = 8$ et $\vec{v} = -2\vec{u}$

2

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et I, J, K et L les milieux des côtés.



Associer chacun des produits scalaires avec le calcul ou le résultat auquel il est égal.

- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BL}$
- $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$
- $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KL}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LK}$

- $AB \times AI$
- $-IB \times IA$
- $BC \times BJ$
- 0

3 Donner un vecteur normal aux droites suivantes :

1) d_1 d'équation $65x - 12y + 6 = 0$
2) d_2 d'équation $y = 3x - 2$
3) d_3 d'équation $-8x = -y + 2$
4) (AB) avec $A(4\,;\,3)$ et $B(6\,;\,12)$

4 d, d'équation $2x - 8y + 28 = 0$ est-elle la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et passant par $T(14\,;\,7)$?

5 Donner le rayon et les coordonnées du centre du cercle :

1) $\mathscr{C}_1$ d'équation $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$
2) $\mathscr{C}_2$ d'équation $(x+3)^2 + (y-7)^2 = 5$

6 Les droites suivantes sont-elles perpendiculaires ?

1) (AB) et (CD) avec $A(1\,;\,-3)$, $B(-1\,;\,5)$, $C(-8\,;\,3)$ et $D(7\,;\,7)$.
2) (EF) et d_1 d'équation $x + 2y - 7 = 0$ avec $E(1\,;\,7)$ et $F(3\,;\,11)$.
3) d_2 et d_3 d'équation respective $4x - 8y - 11 = 0$ et $-2x - y = 5$.

Définition et coordonnées

7 On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

1) Faire une figure.
2) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de AB, BC et AC.
3) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

8 On considère trois points E, F et G du plan tels que $EF = 8$, $EG = 6$ et $FG = 11$. Calculer :

1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG}$
2) $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GE}$
3) $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{FE}$

9 On considère les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\|\vec{a}\|$, $\left\|\vec{b}\right\|$ et $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|$.
2) En déduire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

10 Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
2) $\vec{s} \cdot \vec{t}$ avec $\vec{s}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
3) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4) $\vec{c} \cdot \overrightarrow{UV}$ avec $\vec{c}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$, $U(\sqrt{24}+5\,;\,1)$ et $V(5\,;\,\sqrt{2})$
5) $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A(-1\,;\,2)$ et $B(-3\,;\,6)$
6) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MR}$ avec $C(5\,;\,6)$, $D(-1\,;\,4)$, $M(3\,;\,7)$ et $R(8\,;\,9)$
7) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{EF}$ avec $E(0\,;\,1)$, $F(3\,;\,0)$, $S(8\,;\,8)$ et $T(5\,;\,5)$

11 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Calculer :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
2) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$
3) $(-\vec{u}) \cdot (3\vec{v})$

12 ALGO

Écrire un algorithme :

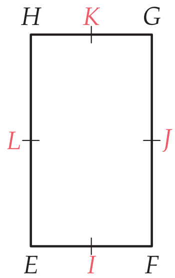
- demandant à l'utilisateur de saisir les coordonnées de deux vecteurs dans un repère orthonormé ;
- donnant, en sortie, le produit scalaire de ces deux vecteurs.

13 ► MÉTHODE 2 p. 222

Reprendre la figure de l'exercice **2** page 228.

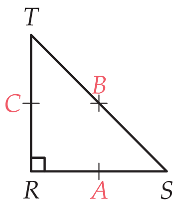
1) Choisir un repère orthonormé adapté et donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
2) En déduire :
   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$
   b) $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{JD}$
   c) $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DL}$
   d) $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{JA}$

14 On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF = 4$ et $EH = 7$, et les points I, J, K et L, milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$.



1) Reproduire la figure.
2) En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :
   a) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}$
   b) $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{EG}$
   c) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}$
   d) $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EK}$
   e) $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IG}$
   f) $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{JK}$

15 On considère le triangle isocèle et rectangle RST ci-dessous, tel que $RS = RT = 4$, et les points A, B et C, milieux respectifs des côtés $[RS]$, $[ST]$ et $[RT]$.



En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :
1) $\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RS}$ 3) $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{SA}$ 4) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CB}$

16 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\y\end{pmatrix}$ avec x et y réels.
1) Déterminer x tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$.
2) Déterminer y tel que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \sqrt{12}$.

17 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\2x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$ avec x réel.
Déterminer, si elle(s) existe(nt), pour quelle(s) valeur(s) de x, on a :
1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -10$
3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$
4) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 7$

18 D'après le cours, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? Justifier.

Orthogonalité

19 ► MÉTHODE 1 p. 222

On considère les points $A(1\,;\,3)$, $B(3\,;\,1)$, $C(-2\,;\,-2)$, $D(13\,;\,-5)$ et $E(4\,;\,3)$.
1) Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
2) Même question pour :
   a) (AC) et (BD)
   b) (BE) et (CD)

20 On considère quatre points $J(6\,;\,1)$, $K(2\,;\,4)$, $L(1\,;\,-5)$ et $M\left(-\frac{5}{2}\,;\,-2\right)$.
1) Le triangle JKL est-il rectangle en J ?
2) Le triangle JKM est-il rectangle ?

21 On considère trois points $A(\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3})$, $C(-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7}+2\sqrt{3})$.
Montrer que ABC est rectangle en B.

22 On considère quatre points $Q(2\,;\,-2)$, $R(1\,;\,1)$, $S(4\,;\,2)$ et $T(5\,;\,-1)$.
Déterminer la nature du quadrilatère $QRST$.

23 On considère trois points $A(5{,}2\,;\,4)$, $B(6\,;\,3{,}1)$ et $C(1\,;\,y)$.
Déterminer y tel que ABC soit rectangle en A.

24 On considère quatre points $A(0\,;\,0)$, $B(6\,;\,2)$, $C(-1{,}5\,;\,4{,}5)$ et $D\left(2{,}5\,;\,\frac{35}{6}\right)$.
Montrer que $ABCD$ est un trapèze rectangle puis calculer son aire.

25 On considère deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées, d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
1) Donner un vecteur directeur de chacune des deux droites.
2) En déduire la propriété suivante :
   Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.
3) Parmi les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $y = 2x + 3$, $y = -2x + 5$ et $y = -\frac{1}{2}x - 6$, lesquelles sont perpendiculaires ?

S'entraîner

26 Associer chacune des égalités vectorielles suivantes :

- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k décrit $\mathbb{R}_+$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

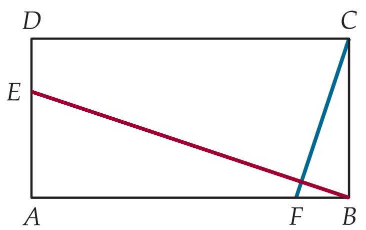
à l'ensemble des points M qui lui correspond :

- la demi-droite $[AB)$
- la hauteur issue de C dans ABC
- le cercle de diamètre $[AB]$
- la perpendiculaire à $[BC]$ passant par A

27 Déterminer, si possible, la ou les valeurs de m pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ m \end{pmatrix}$
2) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2m \\ 6 \end{pmatrix}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ m-4 \end{pmatrix}$
4) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ m \end{pmatrix}$
5) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ m \end{pmatrix}$

28 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB = 6$ et $AD = 3$, $E \in [AD]$ avec $AE = 2$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 5$.



Montrer que les droites (FC) et (BE) sont perpendiculaires.

29 ALGO

Écrire un algorithme :

- demandant à l'utilisateur de saisir les coordonnées de quatre points A, B, C et D ;
- affichant en sortie si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ou si elles ne le sont pas.

Propriétés algébriques

30 **Démonstration d'une propriété algébrique**

Prérequis. On supposera connue la propriété suivante.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Question. Montrer que, pour tous réels k et k', et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

$$(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

31 On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 2$, $AC = 6$ et $BC = 7$.

1) a) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2) En utilisant la méthode précédente, calculer :
   a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

32 On considère trois points M, N et O du plan tels que $MN = 27$, $MO = 36$ et $NO = 45$.

Calculer :

1) $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MN}$ 2) $\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{NM}$ 3) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$

33 Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

1) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} + 4\vec{v})$
2) $(5\vec{u} - 4\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
3) $(-3\vec{u} + 6\vec{v}) \cdot (-\vec{u} - 5\vec{v})$
4) $(-\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 6\vec{v})$

34 Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{r} \cdot \vec{s}$, $\|\vec{r}\|$ et $\|\vec{s}\|$.

1) $\left(\frac{1}{3}\vec{r} + \vec{s}\right) \cdot (6\vec{r} - 9\vec{s})$
2) $\left(-\sqrt{7}\vec{r} + \sqrt{2}\vec{s}\right) \cdot \left(\sqrt{7}\vec{r} + \sqrt{2}\vec{s}\right)$
3) $\left(\left(1 + \sqrt{3}\right)\vec{r} + 5\vec{s}\right) \cdot (\vec{r} + \vec{s})$

35 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 2$.

1) a) Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 3\vec{v})$.
   b) En déduire $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$.
2) En utilisant la méthode précédente, calculer :
   a) $\|8\vec{u} + 5\vec{v}\|$ b) $\|-6\vec{u} - 2\vec{v}\|$

36 En reprenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice précédent, calculer :

1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$
2) $\|2\vec{u} - 3\vec{v}\|^2 + \|4\vec{u} + 5\vec{v}\|^2$

37 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$, $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.

1) Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u}+t\vec{v}\| = 2$? Si oui, le ou les déterminer.
2) Existe-t-il un ou des réels t tels que $\|\vec{u}+t\vec{v}\| = 1$? Si oui, le ou les déterminer.
3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \|\vec{u}+t\vec{v}\|^2$.
   b) En déduire la plus petite valeur possible de $\|\vec{u}+t\vec{v}\|$.

38 On sait que cinq points du plan A, B, C, D et E vérifient :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 2$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED} = -4$

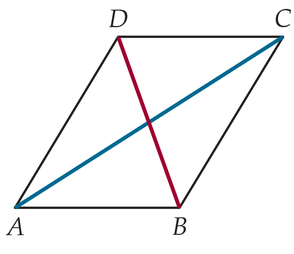
Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

39 On considère quatre points A, B, C et D du plan.

1) À l'aide d'une identité remarquable, montrer que :
   - $AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)$
   - $CD^2 - DA^2 = \overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right)$
2) En déduire $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.
3) a) En utilisant la propriété précédente, montrer que les cerf-volant ont des diagonales perpendiculaires.
   b) La réciproque est-elle vraie, autrement dit, un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires est-il nécessairement un cerf-volant ?

40 **Identité de polarisation**

1) Démontrer l'identité de polarisation :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$
2) On considère un parallélogramme $ABCD$ dont les diagonales ont pour longueur $AC = 7$ et $BD = 4$.



   a) En utilisant l'identité de polarisation démontrée à la question précédente, justifier que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(AC^2 - \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right\|^2\right).$$
   b) En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Produit scalaire et angles

41 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec :

1) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0{,}1$
2) $\|\vec{u}\| = 23$, $\|\vec{v}\| = 11$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0{,}93$
3) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 8$ et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$
4) $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5\pi}{3}\ (2\pi)$
5) $\|\vec{u}\| = 12$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
6) $\|\vec{u}\| = 9$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} = -1{,}5\vec{v}$

42 Calculer $\vec{a}\cdot\vec{b}$ avec :

1) $\|\vec{a}\| = \frac{5}{6}$, $\left\|\vec{b}\right\| = \frac{\sqrt{3}}{8}$ et $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$
2) $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\left\|\vec{b}\right\| = 6$ et $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
3) $\|\vec{a}\| = 2\sqrt{2}$, $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{8}$ et $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \pi\ (2\pi)$
4) $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}+1$ et $\vec{b} = \sqrt{3}\vec{a}$

43 On considère un triangle ABC avec $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

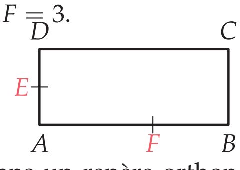
1) Faire une figure.
2) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
3) Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
   On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.

44 ► MÉTHODE 3 p. 224

On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT}$, RS et RT.
   b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à 0,01 degré près.
2) Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.
3) En déduire $\widehat{STR}$.

45 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous, tel que $AB = 5$ et $AD = 2$, E est le milieu de $[AD]$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 3$.



En se plaçant dans un repère orthonormé adapté et à l'aide du produit scalaire, déterminer, à 0,01° près :

1) $\widehat{BAC}$ 2) $\widehat{DFB}$ 3) $\widehat{DFC}$ 4) $\widehat{CEF}$

46 On considère un triangle OMN tel que $OM = 5$, $ON = 8$ et $\widehat{MON} = \frac{\pi}{4}$ radians.

Déterminer MN (on pourra d'abord calculer $\overrightarrow{MN}^2$ en utilisant la relation de Chasles).

S'entraîner

47 On considère trois points I, J et K du plan tels que $IJ = 4$, $IK = 5$ et $JK = 8$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
3) En déduire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$.
4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{JIK}$, arrondi à 0,1 près.

48 On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 12$.

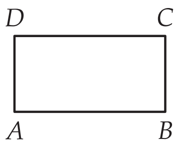
1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire une mesure de $\widehat{A}$, arrondi à 0,1 près.
2) Déterminer $\widehat{B}$ puis $\widehat{C}$.

49 **Une autre formule de la médiane**

On considère un triangle ABC et I le milieu de $[AB]$.

1) Montrer que $CA^2 - CB^2 = 2\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2) En déduire que $|CA^2 - CB^2| = 2IH \times AB$ où H est le pied de la hauteur issue de C dans ABC.
3) Redémontrer la propriété connue :
   « si ABC est isocèle en C, alors le pied de la hauteur issue de C est le milieu de $[AB]$ ».

50 On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB = 4$ et $AD = 2$.

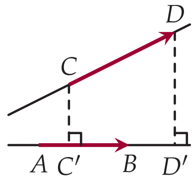


1) On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 8$.
   a) Montrer qu'un point M appartient à $\mathscr{E}_1$ si, et seulement si, M', son projeté orthogonal sur (AB), vérifie $AB \times AM' = 8$ et $M' \in [AB]$.
   b) En déduire M' puis $\mathscr{E}_1$.
2) On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DM} = -2$.
   a) Montrer qu'un point M appartient à $\mathscr{E}_2$ si, et seulement si, M', son projeté orthogonal sur (BC), vérifie $BC \times CM' = 2$ et $M' \in [CB)$.
   b) En déduire M' puis $\mathscr{E}_2$.
3) Reproduire le rectangle de l'énoncé puis tracer, après l'avoir déterminé :
   a) en rouge, l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM} = 16$;
   b) en bleu, l'ensemble $\mathscr{E}_4$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$.

Produit scalaire et projection

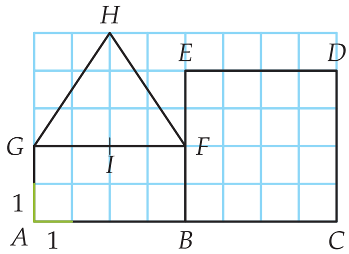
51 **Projection de deux points sur une droite**

Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB) et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).



1) Montrer l'égalité vectorielle :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}.$$
2) En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

Dans les exercices **52** à **54**, on se réfère à la figure suivante :



52 En utilisant des projections, calculer les produits scalaires suivants (on reproduira la figure et on pourra introduire de nouveaux points) :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}$
3) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA}$
4) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FH}$
5) $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BC}$
6) $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{FD}$

53 **Décomposition de vecteurs**

1) a) Montrer que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FH} = \left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}\right) \cdot \left(\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IH}\right)$.
   b) En déduire $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FH}$.
2) En décomposant les deux vecteurs de la même manière qu'à la question précédente, calculer :
   a) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF}$.
   b) $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{EI}$.

54 En utilisant le produit scalaire, calculer les mesures des angles suivants, on donnera le résultat en degrés arrondi à 0,1 près.

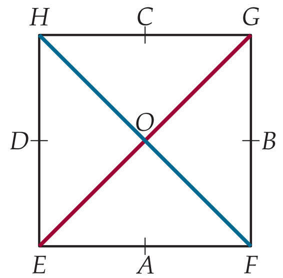
1) $\widehat{AFB}$
2) $\widehat{IFD}$
3) $\widehat{HFG}$

55 On considère trois points $A(-1\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 2)$ et $C(0\ ;\ 7)$ et B', le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

1) Exprimer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'.
2) En déduire CB' puis BB'.
3) Calculer l'aire de ABC.

Choisir la bonne formule

56 On considère le carré $EFGH$ de côté a ci-dessous.

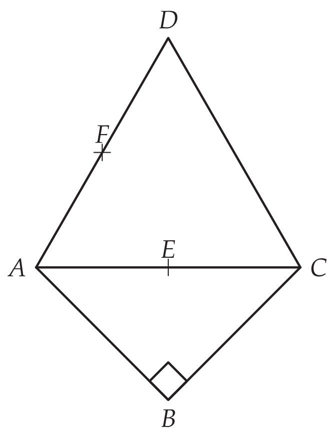


Dans ce carré, A est le milieu de $[EF]$, B le milieu de $[FG]$, C le milieu de $[GH]$, D le milieu de $[HE]$ et O est le centre de $EFGH$.

En utilisant la méthode de votre choix, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a :

1) $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HF}$
2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB}$
3) $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{GE}$
4) $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{FE}$
5) $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{FH}$
6) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$
7) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$
8) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CO}$
9) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EG}$

57 On considère le triangle équilatéral ADC de côté 2 et le triangle ABC, isocèle et rectangle en B ci-dessous.

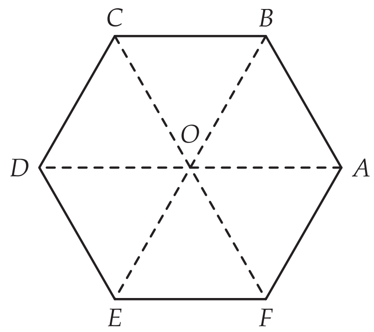


Dans cette figure, E est le milieu de $[AC]$ et F celui de $[AD]$.

En utilisant la méthode de votre choix, calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$
2) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CA}$
3) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{EA}$
4) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB}$
5) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$
6) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}$
7) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF}$
8) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$
9) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ED}$

58 On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O et de côté 1 ci-dessous.



En utilisant la méthode de votre choix, calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{FO}$
2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
3) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF}$
4) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FA}$
5) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OD}$
6) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{FB}$
7) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DF}$
8) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA}$
9) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CO}$

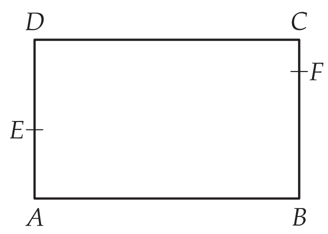
59 On considère quatre points A, B, C et D distincts tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes.

On appelle :

- A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur (CD)
- C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB)

1) Faire une figure.
2) Montrer que $AB \times C'D' = A'B' \times CD$.

60 On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 5$ et $AD = 3$, E un point quelconque de $[AD]$ et F un point quelconque de $[BC]$.



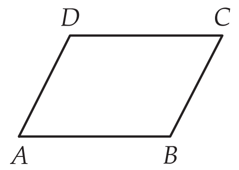
1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$.
2) Soit G un point de $[CD]$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ en fonction de DG.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GF}$ en fonction de BF.

S'entraîner

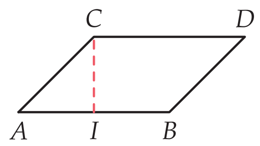
61 **Quelques configurations**

1) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$.

Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

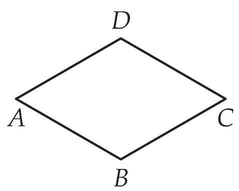


2) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = a$ et I est à la fois le milieu de $[AB]$ et le projeté orthogonal de C sur (AB).
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



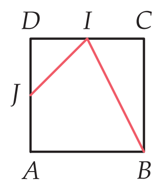
3) $ABCD$ est un losange de côté 4 et vérifiant $\widehat{BAD} = 60°$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



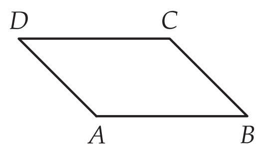
4) $ABCD$ est un carré de côté 1 et I est le milieu de $[DC]$ et J celui de $[AD]$.

Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{BI}$.

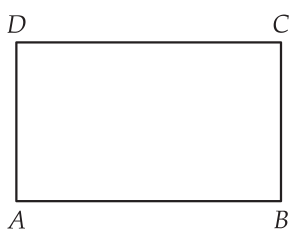


5) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 5$ et $BD = 8$ et $\widehat{ABD} = 20°$.

Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
Arrondir à 0,1 près.



62 On considère un rectangle $ABCD$ du plan.



Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = AD^2$

2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = BC^2$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{AB^2}{2}$

4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{AD^2}{2}$

Vecteur normal et équation de droite

63 Donner un vecteur normal à la droite :

1) d_1 d'équation $2x - 3y + 5 = 0$

2) d_2 d'équation $12x - 3y = 2$

3) d_3 d'équation $8x = -9y + 7$

4) d_4 d'équation $-3y + 2x = 5$

5) d_5 d'équation $5y = 2$

64 Dire si la proposition est vraie ou fausse.

1) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $4x - 6y = 1$.

2) Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $5y + 4x - 8 = 0$.

3) Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $-2y + 2x = 5$.

65 ► MÉTHODE 4 p. 226

Déterminer une équation de la droite :

1) de vecteur normal $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passant par $A(2\,;\,-5)$

2) de vecteur normal $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passant par $B(-3\,;\,6)$

3) de vecteur normal $\vec{c}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passant par $C(2\,;\,-3)$

4) de vecteur normal $\vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et passant par $D(3\,;\,9)$

5) de vecteur normal $\vec{e}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et passant par $E(7\,;\,8)$

66 Déterminer une équation de la droite :

1) de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et passant par $R(8\,;\,12)$

2) de vecteur normal $\vec{s}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et passant par $T(2\,;\,3)$

3) de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et passant par $C(-8\,;\,5)$ avec $A(1\,;\,1)$ et $B(6\,;\,6)$

4) de vecteur normal $\overrightarrow{MP}$ et passant par $F\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ avec $M\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{9}\right)$ et $P\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{7}{9}\right)$

5) de vecteur normal $\vec{t}\begin{pmatrix} -\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$ et passant par $\Omega(6\pi\,;\,3\pi - 1)$

67 On considère trois points $A(3\,;\,4)$, $B(-2\,;\,5)$ et $C(0\,;\,-1)$.
Déterminer une équation de :
1) la perpendiculaire à $[AC]$ passant par B
2) la hauteur issue de C dans ABC
3) la médiatrice de $[BC]$

68 On considère trois points $F(2\,;\,5)$, $G(4\,;\,-1)$ et $H(-1\,;\,3)$.
1) Déterminer les équations des hauteurs issues de H et F dans le triangle FGH.
2) En déduire les coordonnées de l'orthocentre de FGH.

69 On reprend les points F, G et H de l'exercice précédent.
1) Déterminer les équations des médiatrices de $[FG]$ et $[GH]$.
2) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit à FGH.

70 On considère trois points $M(-4\,;\,3)$, $N(4\,;\,0)$ et $P(-1\,;\,-2)$.
1) Déterminer une équation de d, la hauteur issue de P dans MNP.
2) Déterminer une équation de la droite (MN).
3) a) Déterminer les coordonnées de P', pied de la hauteur issue de P dans MNP.
   b) En déduire la longueur PP'.
4) En déduire l'aire de MNP.
5) Déterminer MM' et NN' où M' et N' sont respectivement les pieds des hauteurs issues de M et N dans MNP.

71 **Deux points et l'orthocentre** INFO
On considère deux points $A(-2\,;\,2)$ et $B(4\,;\,-1)$ du plan.
Le but de cet exercice est de déterminer un point C tel que $O(0\,;\,0)$ soit l'orthocentre de ABC.
1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique et créer :
   - A, B et O ;
   - d, la perpendiculaire à $[AB]$ passant par O.
2) Créer un point C sur d puis la hauteur issue de B dans ABC.
3) a) Déplacer C sur d.
   b) Conjecturer les coordonnées d'un point C répondant à la question posée.
4) Valider la conjecture par le calcul.

Applications du produit scalaire

72 Donner une équation du cercle :
1) de centre $\Omega_1(2\,;\,6)$ et de rayon 3
2) de centre $\Omega_2(-3\,;\,4)$ et de rayon $\sqrt{7}$

73 ► MÉTHODE 5 p. 227
On considère trois points $A(1\,;\,2)$, $B(4\,;\,6)$ et $C(-3\,;\,-8)$.
Donner une équation du cercle de diamètre :
1) $[AB]$ 2) $[BC]$ 3) $[AC]$

74 On considère l'équation $x^2-8x+y^2-6y=0$.
1) Écrire x^2-8x et y^2-6y sous forme canonique.
2) En déduire que :
$x^2-8x+y^2-6y=0 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=5^2$.
3) En déduire que $x^2-8x+y^2-6y=0$ est l'équation d'un cercle de centre Ω et de rayon r à préciser.

75 Déterminer l'ensemble d'équation :
1) $x^2+6x+y^2-12y=-40$
2) $x^2+20x+y^2+40y+499=0$
3) $x^2-2x+y^2-6y+10=0$
4) $x^2-6x+y^2+4y+30=0$

76 On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3\,;\,-4)$ et de rayon 2.
1) Donner une équation de $\mathscr{C}$.
2) Représenter $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.
3) a) Déterminer deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$.
   b) En déduire une « nouvelle » équation de $\mathscr{C}$.
   c) Montrer que les équations trouvées aux questions **1)** et **3)b)** sont équivalentes.

77 On considère la droite d'équation $x+3y-5=0$ et le cercle d'équation $(x-4)^2+(y+2)^2=9$.
1) Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-5=0 \\ (x-4)^2+(y+2)^2=9 \end{cases}$.
2) Interpréter géométriquement les solutions du système.

78 Déterminer les points d'intersection éventuels du cercle d'équation $(x+5)^2+y^2=9$ et de la droite :
1) d_1 d'équation $3x-y+20=0$
2) d_2 d'équation $3x+y=5$

79 On considère trois points $A(-3\,;\,-4)$, $B(1\,;\,-2)$ et $C(0\,;\,4)$.
Déterminer les points d'intersection du cercle de centre A passant par C et de la perpendiculaire à $[AC]$ passant par B.

80 **Intersection de cercles** INFO

On considère trois points $A(1\,;\,3)$, $B(2\,;\,-1)$ et $C(6\,;\,8)$.

1) Donner une équation de $\mathscr{C}$, le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{26}$.
2) Déterminer une équation du cercle de diamètre $[BC]$.
3) Résoudre le système :
$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2=26 \\ x^2-8x+y^2-7y+4=0 \end{cases}.$$
4) Concrètement, à quoi correspondent les solutions du système ? Contrôler avec un logiciel de géométrie.

81 **De nouveaux cosinus et sinus**

1) Calculer $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$.
2) En déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

82 **Formules de duplication**

Soit x un réel.

1) Montrer que $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.
2) a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $(\cos(x))^2$ et $(\sin(x))^2$.
   b) En utilisant l'égalité $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$, montrer que :
   $\cos(2x)=2(\cos(x))^2-1=1-2(\sin(x))^2$.
3) a) Justifier que $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right)^2-1$ puis déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
   b) En déduire $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
4) Déterminer de même $\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$.

83 On veut résoudre $\cos(x)+\sin(x)=\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

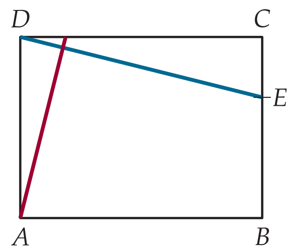
1) Justifier que cette équation est équivalente à $\cos(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lambda$.
2) Simplifier cette équation avec une formule d'addition.
3) En déduire l'ensemble des solutions de :
$\cos(x)+\sin(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
4) Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $\cos(x)+\sin(x)=\lambda$ admet des solutions ?

Problèmes

84 On considère trois points $A(1\,;\,0)$, $B(4\,;\,1)$ et $C(2\,;\,5)$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.
3) En déduire que $\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.
4) Tracer C' le pied de la hauteur issue de C sur (AB) et montrer que $CC'=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.
5) En déduire l'aire de ABC.
6) a) Tracer le rectangle de sommets les points de coordonnées $(1\,;\,0)$, $(4\,;\,0)$, $(4\,;\,5)$ et $(1\,;\,5)$.
   b) Retrouver la réponse à la question précédente.

85 On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB=4$ et $AD=3$ ci-dessous avec $E\in[CB]$ tel que $EC=1$.



On cherche à déterminer où placer le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.
Pour cela, nous allons utiliser deux méthodes, l'une analytique, l'autre géométrique.

Partie A : Méthode analytique

1) Donner les coordonnées de A, D et E dans le repère $\left(A\,;\,\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB},\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$.
2) a) Soit $F(x\,;\,y)$.
   Donner une condition sur y pour que F appartiennent bien à (CD).
   b) Justifier que $(DE)\perp(AF)\Leftrightarrow\begin{cases} y=3 \\ 4x-3=0 \end{cases}$.
   c) En déduire où placer F sur $[CD]$ pour que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.

Partie B : Méthode géométrique

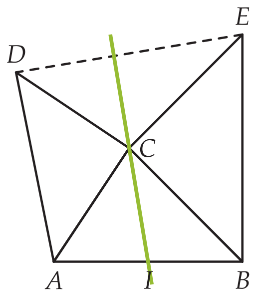
1) Montrer que $\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)=4DF-3$.
2) En déduire que le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires vérifie $DF=\dfrac{3}{4}$.

86 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$.
Les courbes représentatives de f et g admettent-elles des tangentes perpendiculaires ? Si oui, préciser lesquelles.

87 ALGO

Écrire un algorithme :
- demandant à l'utilisateur de rentrer les coordonnées de trois points A, B et C ;
- affichant une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ (on considérera qu'on utilise un logiciel possédant la fonction arccos).

88 On considère un triangle quelconque ABC, I le milieu de $[AB]$ et les points D et E tels que les triangles directs ACD et CBE soient isocèles et rectangles en C.

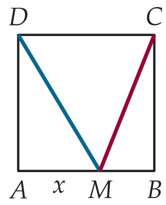


1) On a tracé (CI) la médiane issue de C dans ABC. Quelle droite remarquable de DCE semble-t-elle également être ?
2) Justifier que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
3) En déduire que $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}\right)$.
4) Conclure.

89 Soit m un réel strictement positif, d_m la droite d'équation $x + y = m$ et $\mathscr{C}_m$ le cercle de centre $O(0\,;\,0)$ et de rayon m.
1) Montrer que d_m et $\mathscr{C}_m$ sont sécants quelle que soit la valeur de m et donner leurs points d'intersection.
2) Soit $A(a\,;\,0)$, avec $a \in \mathbb{R}$, et $\mathscr{C}'_m$ le cercle de centre A et de rayon m.
   a) Montrer que d_m et $\mathscr{C}'_m$ ont au moins un point commun si et seulement si $-a^2 + 2ma + m^2 > 0$.
   b) Résoudre cette inéquation d'inconnue a et en déduire où placer A pour que d_m et $\mathscr{C}'_m$ aient au moins un point commun.

90 INFO

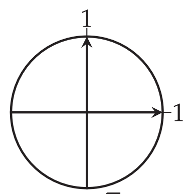
On considère un carré $ABCD$ de côté 1 avec $M \in [AB]$ et on note $x = AM$.



1) On considère le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   a) Donner les coordonnées de A, B, C, D et M dans ce repère.
   b) En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$.
   c) Exprimer $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ en fonction de x.
   d) L'angle $\widehat{CMD}$ peut-il être droit ?
2) a) Exprimer MC et MD en fonction de x.
   b) Montrer que $\cos\left(\widehat{CMD}\right) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{(1+x^2)(2-2x+x^2)}}$.
3) Dans un logiciel de calcul formel, on a entré successivement :
   - `f(x):=(x^2-x+1)/sqrt((1+x^2)*(2-2x+x^2))`
   - `h(x):=deriver(f(x),x)`
   - `resoudre(h(x)=0,x)`
   - `resoudre(h(x)>0,x)`
   - `resoudre(h(x)<0,x)`

   où `sqrt` désigne la racine carrée.
   a) Aux trois dernières étapes, le logiciel répond successivement :
      - `x=1/2`
      - `x>1/2`
      - `x<1/2`

      Interpréter ce résultat.
   b) En déduire le tableau de signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f sur $[0\,;\,1]$.
   c) Quel est le minimum de f sur $[0\,;\,1]$?
4) a) On a tracé ci-dessous le cercle trigonométrique :



   Le reproduire et placer $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 0,6 sur l'axe des abscisses.
   b) Déterminer, à 0,01 degré près, la mesure maximale de l'angle $\widehat{CMD}$.

Approfondir

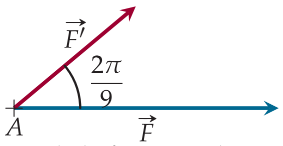
91 INFO

1) Dans un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction inverse.
2) Créer trois curseurs a, b et c variant de -5 à 5 avec un pas de $0,1$ puis les points A, B et C de $\mathscr{C}$ d'abscisse respective a, b et c.
3) Construire H, l'orthocentre de ABC pour des valeurs différentes de a, b et c.
4) a) Faire varier a, b et c. Quelle conjecture peut-on faire sur la position de H ?
   b) Conjecturer une relation entre y_H et a, b et c puis entre x_H et a, b et c.
5) Démontrer ces conjectures.

92 Intensité d'une force

L'intensité d'une force $\vec{F}$ est $\left\|\vec{F}\right\|$, exprimée en Newton.

On considère un point A auquel s'exercent deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ d'intensité respective 100 N et 60 N et telles que $\left(\vec{F};\vec{F'}\right) = \frac{2\pi}{9}\ (2\pi)$.



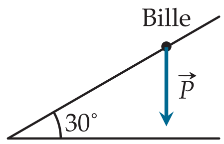
Calculer l'intensité de la force résultante $\vec{F}+\vec{F'}$.

93 Travail d'une force constante

Lorsqu'un objet se déplace de manière rectiligne d'un point A à un point B en étant soumis à une force constante $\vec{F}$, le travail de cette force $W_{AB}\left(\vec{F}\right)$ est donné par $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{F}$ où :

- la distance est exprimée en mètre ;
- l'intensité de la force est exprimée en Newton ;
- le travail est exprimé en Joule.

On laisse glisser une bille de 50 g le long d'un pente de 10 m inclinée de 30°en étant uniquement soumise à son poids (on néglige les frottements).



Calculer le travail du poids de la bille lors de son déplacement.

On rappelle que l'intensité de $\vec{P}$, exprimée en Newton, est $P = m \times g$ avec $g = 9{,}8\,\text{m/s}$ et m est exprimé en kg.

94 Distance d'un point à une droite

On dit que la distance entre une droite d et un point A du plan est la longueur AA' où A' est le projeté orthogonal de A sur d.

Partie A : Formule explicite

On considère une droite d d'équation $ax+by+c=0$ et un point $A(x_A;y_A)$.

1) Dans un repère du plan, tracer une droite d quelconque, un point A extérieur à d et A' son projeté orthogonal sur d.
2) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal de d.
   Montrer que $||\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'A}|| = A'A\sqrt{a^2+b^2}$.
3) a) Exprimer $\vec{n}\cdot\overrightarrow{A'A}$ en fonction de a, b, x_A, y_A, $x_{A'}$ et $y_{A'}$.
   b) Justifier que $-ax_{A'}-by_{A'}=c$.
   c) En déduire que la distance entre A et d est :
$$\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Partie B : Application

Soit trois points $F(0\,;\,6)$, $G(2\,;\,-1)$ et $H(-1\,;\,3)$.

1) Déterminer une équation de (FG).
2) En déduire la distance de H à (FG).
3) Calculer l'aire de FGH.

95 Formules d'addition

Prérequis. On supposera connues les propriétés suivantes :

- pour tous réels a et b, on a :
  $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$;
- pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

1) En remarquant que $a+b = a-(-b)$, exprimer $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
2) a) Exprimer $\cos\left((a-b)+\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\sin(a-b)$.
   b) Exprimer $\cos\left(\left(a+\frac{\pi}{2}\right)-b\right)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
   c) En déduire $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
3) Déduire $\sin(a+b)$ de la formule trouvée à la question précédente.

96 On suppose connues les formules de duplication :

- $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Résoudre les équations :

1) $\sin(2x) = \cos(x)$ dans $[0 ; 2\pi[$
2) $\sin(2x) = \sin(x)$ dans $]-\pi ; \pi]$
3) $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$
4) $2\cos(2x) - \sqrt{3}\cos(x) + \dfrac{1}{2} = 0$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

97 **Aire d'un triangle et formule des sinus**

On considère un triangle ABC dans lequel on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ et A', le projeté orthogonal de A sur (BC).

Partie A : Aire d'un triangle

1) Tracer trois figures (on tracera $[BC]$ horizontalement) :
   - l'une où le point A' appartient à $[BC)$ privé de B ;
   - une autre où A' est confondu avec B ;
   - la dernière où A' n'appartient pas à $[BC)$.
2) Raisonnons par disjonction des cas.
   a) Dans les deux premiers cas, montrer que l'on a $AA' = c\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.
   b) Dans le troisième cas, montrer préalablement que l'on a $AA' = c\sin\left(\widehat{ABA'}\right)$.
   En déduire que $AA' = c\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.
3) Montrer que l'aire de ABC est $\dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$.
4) Par symétrie des notations, donner l'aire de ABC en fonction de $\sin\widehat{A}$ puis en fonction de $\sin\widehat{C}$.

Partie B : Formule des sinus

1) En utilisant la partie précédente, montrer que :
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\text{Aire de } ABC}.$$
Cette formule est appelée formule des sinus.
2) Déterminer l'aire d'un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 30°$.

98 **Cercle et fonction(s)**

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon 3.

1) a) Le tracer dans un repère orthonormé.
   b) Est-ce la courbe d'une fonction ? Expliquer.
2) Donner une équation de $\mathscr{C}$.
3) Montrer que cette équation est équivalente à :
$y = 2 + \sqrt{9-(x-1)^2}$ ou $y = 2 - \sqrt{9-(x-1)^2}$.
4) On considère les fonctions f et g définies par :
   - $f(x) = 2 + \sqrt{9-(x-1)^2}$;
   - $g(x) = 2 - \sqrt{9-(x-1)^2}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition de ces fonctions.
   b) Tracer les courbes représentatives de ces fonctions de deux couleurs dans le repère précédent.
   Que remarque-t-on ?
   c) Un logiciel de calcul formel donne $f'(3) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $g'(3) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Donner les équations respectives des deux tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisse 3.

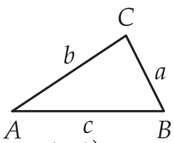
99 **Pourquoi pas avec des coordonnées ?**

Marc n'arrive pas à faire son exercice :

> On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 6$ cm, $AC = \sqrt{10}$ cm et $BC = \sqrt{34}$ cm.
> Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Il a demandé de l'aide sur un forum internet sur lequel un certain rene1596 lui a recommandé de traiter son exercice analytiquement c'est-à-dire avec des coordonnées.

Partie A : Cas général



Dans un triangle ABC, on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

1) Soit $\vec{i} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}$ tel que $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ soit orthonormé direct.
Donner les coordonnées de A et B dans $\left(A ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2) Justifier que C est un des points d'intersection des deux cercles d'équations respectives $x^2+y^2 = b^2$ et $(x-c)^2+y^2 = a^2$.
3) Résoudre le système $\begin{cases} x^2+y^2 = b^2 \\ (x-c)^2+y^2 = a^2 \end{cases}$.
4) En déduire les coordonnées de C dans ce repère (on prendra le point d'ordonnée la plus grande).

Partie B : Retour à l'exercice

1) Donner les coordonnées des points A, B et C de l'exercice de Marc dans le repère de la partie précédente.
2) En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Calculer un produit scalaire

- avec la définition
- avec les coordonnées dans un repère orthonormé
- avec les projetés ou la formule utilisant le cosinus
- à l'aide des propriétés algébriques

Utiliser le produit scalaire

- pour montrer que des droites sont perpendiculaires
- pour calculer la mesure d'un angle

Déterminer et identifier

- un ensemble de points défini grâce à un produit scalaire
- un vecteur normal à une droite d'équation donnée
- une équation de droite connaissant un vecteur normal et un point
- une équation de cercle
  - de centre Ω et de rayon r
  - de diamètre $[AB]$

QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net

Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 8\,\text{cm}$, $AC = 4\,\text{cm}$ et $BC = 6\,\text{cm}$.

100 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$

(a) -84 (b) -42 (c) 42 (d) 116

101 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} =$

(a) $AC \times BC$ (b) $-AC \times CB$ (c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ (d) $-\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

102 $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) =$

(a) $AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et AC^2
(b) $AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et AC
(c) $AB^2 + BC^2$ et AC^2
(d) $AB^2 + BC^2$ et AC

103 L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ est :

(a) le cercle de centre C et de rayon AB
(b) la hauteur issue de C dans le triangle ABC

On considère quatre points $A(2\,;\,3)$, $B(5\,;\,7)$, $C(-8\,;\,10)$ et $D(0\,;\,4)$ dans un repère orthonormé du plan.

104 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

(a) -48 (b) 0 (c) 14

105 Les droites (AB) et (CD) sont :

(a) perpendiculaires (b) parallèles (c) sécantes

106 Le cercle de centre C et de rayon 3 a pour équation :

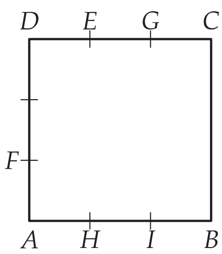
(a) $(x-8)^2 + (y+10)^2 = 3$
(b) $(x+8)^2 + (y-10)^2 = 3$
(c) $(x-8)^2 + (y+10)^2 = 9$
(d) $(x+8)^2 + (y-10)^2 = 9$

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

107 $\vec{u}\cdot\vec{v} =$

ⓐ 5 ⓑ $5\sqrt{2}$ ⓒ $5\sqrt{3}$

On considère le carré $ABCD$ de côté 3 ci-dessous et les points E, F, G, H et I qui sont régulièrement espacés sur les côtés.



108 $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AE} =$

ⓐ $AI \times AH$ ⓑ $-AI \times AH$ ⓒ 2

109 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF} =$

ⓐ $AB \times IA$ ⓑ $AB \times AI$ ⓒ $-AB \times IA$ ⓓ $-AB \times AI$

110 $\cos\left(\widehat{EAB}\right) =$

ⓐ $\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}}{AE \times AB}$ ⓑ $\dfrac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AB}}{EA \times AB}$ ⓒ $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

111 En se plaçant dans $\left(A\,;\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AF}\right)$, $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{IC} =$

ⓐ -7 ⓑ 7 ⓒ -11

Dans les questions **112** à **114**, on se place dans un repère orthonormé du plan.

112 La droite d'équation $2x - 3y + 47 = 0$ admet pour vecteur normal :

ⓐ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ⓑ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ⓒ $\vec{n_3}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ ⓓ $\vec{n_4}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$

113 La droite passant par $A(4\,;7)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ a pour équation :

ⓐ $3x + y - 19 = 0$ ⓑ $3x + y + 19 = 0$ ⓒ $-x + 3y + 17 = 0$ ⓓ $-x + 3y - 17 = 0$

114 Soit $B(6\,;8)$ et $C(-2\,;4)$. Le cercle de diamètre $[BC]$ a pour équation :

ⓐ $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 20$ ⓑ $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 100$ ⓒ $x^2 - 4x + y^2 - 12y + 20 = 0$

Travaux pratiques

TP 1 Un algo pour gagner du temps

INFO ALGO

Pour demain, Florian doit faire l'exercice suivant :

> Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, A un point du plan et d' la perpendiculaire à d passant par A.
> Déterminer les coordonnées d'un deuxième point B de d' afin de pouvoir la tracer (pour avoir un tracé précis, on prendra un point assez éloigné de A par exemple, $x_B = x_A + 5$) avec :
>
> **1)** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ et $A(-2\,;\,6)$ **3)** $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $A(6\,;\,7)$ **5)** $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ et $A(0\,;\,0)$
>
> **2)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $A(3\,;\,4)$ **4)** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $A(-1\,;\,2)$ **6)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $A(4\,;\,3)$

Jugeant cet exercice trop répétitif, Florian décide d'écrire l'algorithme ci-contre que nous allons essayer de comprendre.

1) a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ pour que d et d' soient perpendiculaires.

b) Traduire cette condition en termes de coordonnées (on obtiendra un égalité en fonction de x_A ; y_A, x_B, y_B, $x_{\vec{u}}$ et $y_{\vec{u}}$).

c) Compléter les pointillés dans l'algorithme afin qu'il réponde à la problématique posée.

2) Saisir l'algorithme dans un logiciel de programmation ou sur la calculatrice.

3) Utiliser l'algorithme pour répondre aux questions de l'exercice posé à Florian.

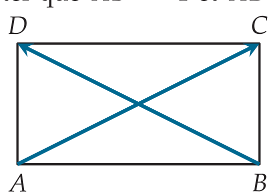
4) Expliquer le problème rencontré.

5) Modifier l'algorithme afin qu'il permette de traiter tous les cas possibles en utilisant un test `Si ... Alors`.

```
Liste des variables utilisées
   xu,yu,xA,yA,xB,yB : réel
Traitement
   Demander xu
   Demander yu
   Demander xA
   Demander yA
   Donner à xB la valeur de xA+5
   Donner à yB la valeur de ...
Affichage
   Afficher "Les coordonnées de B sont "
   Afficher xB
   Afficher yB
```

TP 2 De l'importance de savoir respecter la norme

On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AD = 2$ dans lequel on doit calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.



1) a) Donner sans calcul $\left\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right\|$ puis calculer $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$.

b) En déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ avec la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

2) Reproduire la figure en prenant le cm pour unité.

3) Pour calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, Alma et Adem ont eu la même idée, introduire un repère orthonormé, mais pas le même :

- Alma propose le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$
- Adem propose le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

a) Donner les coordonnées des quatre points de la figure dans le repère d'Alma puis calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b) Même question avec le repère d'Adem.

c) Que remarque-t-on ?

4) D'Adem ou d'Alma, qui a choisi « le bon » repère orthonormé et pourquoi ?

TP 3 En passant par la médiane

INFO

Dans ce TP, on considère deux points du plan A et B fixés et un réel positif k.

1 Avec un logiciel de géométrie dynamique

On s'intéresse à l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = k$, dont on dit que c'est une ligne de niveau.

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

2) Créer deux points A et B « pas trop éloignés » et un curseur k variant entre 0 et 100 avec un pas de 1 et le régler sur 50.

3) Soit $M(x; y)$ dans un repère orthonormé, traduire $MA^2 + MB^2 = k$ en termes de coordonnées.

4) a) Dans la barre de saisie, écrire `(x-x(A))^2+(y-y(A))^2+(x-x(B))^2+(y-y(B))^2=k`.

b) Quelle semble être la nature de l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$?

c) Faire varier k et affiner la conjecture faite à la question précédente (on pourra éventuellement créer d'autres points).

2 Avec le théorème de la médiane

1) Soit I, le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2) En déduire que $MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$.

3) Démontrer le théorème de la médiane :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

4) Montrer que $MA^2 + MB^2 = k$ est équivalent à $MI^2 = \dfrac{2k - AB^2}{4}$.

5) a) En déduire pour quelles valeurs de k il existe des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$.

b) Quel est alors l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$?

3 Une autre ligne de niveau

On s'intéresse maintenant à une autre ligne de niveau, l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1) En s'inspirant du travail fait dans les parties précédentes, déterminer l'ensemble des points M, vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ dans le cas où $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$ dans un repère orthonormé.

2) Donner, dans le cas général, l'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

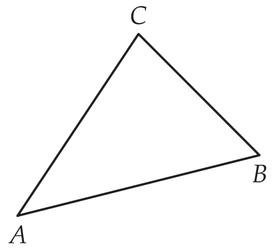
Travaux pratiques

TP 4 Théorème d'Al-Kashi

Tout le monde connaît le théorème de Pythagore (mais rappelons-le tout de même) :
Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
Autrement dit, quand on connaît les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle, on peut calculer la longueur du troisième. Oui, mais si le triangle n'est pas rectangle ?

1 Théorème d'Al-Kashi

On considère un triangle ABC quelconque.



1) Développer $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$.

2) En déduire que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

3) Par symétrie des notations, écrire :
- AC^2 en fonction de BC, AB et $\widehat{ABC}$;
- AB^2 en fonction de BC, AC et $\widehat{ACB}$.

4) a) Expliquer pourquoi cette formule est aussi appelée théorème de Pythagore généralisé.

b) D'une manière générale, quand on connaît les longueurs de deux côtés d'un triangle, peut-on calculer la longueur du troisième ? Si non, de quelle information supplémentaire a-t-on besoin ?

2 Résolution de triangle

En géométrie, résoudre un triangle consiste à en donner les longueurs des côtés et les mesures des angles.

1) On considère un triangle ABC avec $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

a) Déterminer la longueur BC avec le théorème d'Al-Kashi.

b) Déterminer les mesures des angles de ABC. On arrondira à 0,1°près.

2) Résoudre le triangle ABC avec $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 20°$. On arrondira les longueurs à 0,1 cm et les mesures des angles à 0,1°près.

3 Résolution de triangle (mais plus dur...)

On considère un triangle ABC avec $AB = 2\,\text{cm}$, $AC = 5\,\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

1) Tracer un triangle correspondant à ces conditions.

2) Écrire le théorème d'Al-Kashi faisant intervenir l'angle $\widehat{ABC}$ et remplacer par les valeurs connues.

3) a) Résoudre l'équation $x^2 - 2x - 21 = 0$.

b) Résoudre le triangle ABC.

TP 5 En prenant la tangente

INFO

Dans tout le TP, le plan est muni d'un repère orthonormé.

1 Une définition de la tangente

Le but de cette partie est de dégager, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une définition de la tangente à un cercle en un point de celui-ci.

1) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

2) Créer un point A quelconque et un curseur r variant de 0 à 5.

3) Créer le cercle de centre A et de rayon r.

4) Créer un point B sur ce cercle puis, avec l'outil `Tangentes`, créer la tangente au cercle au point B.

5) Créer le rayon $[AB]$. Que remarque-t-on ?

6) Faire varier r et bouger A dans le plan et B, sur le cercle.
La remarque précédente semble-t-elle encore valide ?

7) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre A.
Proposer une définition de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point B de ce cercle.

Dans la suite, on prendra cette définition de la tangente.

Les parties **2**, **3** *et* **4** *peuvent être traitées indépendamment.*

2 Une propriété géométrique

1) Sur la figure précédente, dans le logiciel de géométrie dynamique, créer un point D sur le cercle, non diamétralement opposé à B, puis la tangente au cercle en ce point D.

2) Créer le point E, intersection des deux tangentes.

3) Émettre une conjecture sur le triangle DBE.

4) Démontrer cette conjecture.

3 Équation d'une tangente

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(4\,;\,1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1) Montrer que $B(5\,;\,3)$ appartient à $\mathscr{C}$.

2) Déterminer par le calcul une équation cartésienne de T, la tangente à $\mathscr{C}$ en B.

4 Tangente passant par l'origine

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(4\,;\,1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

On cherche à déterminer s'il existe un ou des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ passe par l'origine.

1) Soit $M(x\,;\,y) \in \mathscr{C}$. Montrer que le point M répond au problème posé si et seulement si

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-4)(x-0) + (y-1)(y-0) = 0 \end{cases}.$$

2) Montrer que le système précédent est équivalent à $\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - y + (-4x + 16 - y + 1) = 5 \\ x^2 - 4x + y^2 - y = 0 \end{cases}$

puis le résoudre.

3) Conclure.

4) Contrôler avec un logiciel de géométrie.

Travaux pratiques

TP 6 Une inégalité remarquable

Le but de ce TP est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|$.

Pour cela, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \|\vec{u} + x\vec{v}\|^2$.

1) Quel est le signe de f ?
2) Montrer que $f(x) = x^2\|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v})x + \|\vec{u}\|^2$.
3) **a)** Calculer le discriminant Δ de la fonction du second degré f.
b) D'après la question 1, quel est le signe de Δ ?
c) En déduire que $4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$.
d) Conclure.

Pour montrer cette inégalité, on aurait aussi pu utiliser la formule du cours :

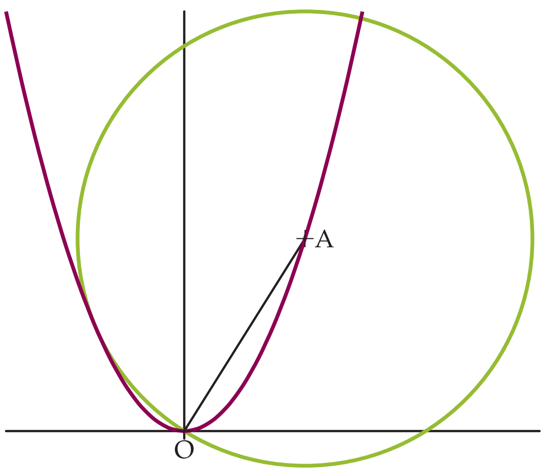
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

mais cela aurait-été nettement moins amusant !
Cette formule permet également de montrer facilement que cette inégalité n'est une égalité que si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Récréation, énigmes

Cercle et parabole

Dans un repère orthonormé, on considère $\mathscr{C}$, la courbe représentative de la fonction carré et un point A sur cette courbe.
Montrer qu'il y a deux « positions » possibles pour A sur $\mathscr{C}$ pour que le cercle de centre A et de rayon OA admette une tangente commune avec $\mathscr{C}$ et déterminer ces « positions » (on utilisera un logiciel de calcul formel pour les calculs).



De l'art de multiplier des vecteurs

Mener des recherches afin de déterminer :

1) ce que veut dire le mot **scalaire** qui donne son nom au produit scalaire ;
2) s'il existe une ou d'autres façon(s) de « multiplier » deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (du plan ou de l'espace).

34 **1)** La suite n'est pas monotone. Elle converge vers 0.

2) La suite n'est pas monotone et décroissante à partir du terme d'indice 3 et diverge vers $+\infty$.

38 **1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Auto-évaluation QCM

65 a **66** a
67 b **68** a
69 b **70** b
71 c **72** a
73 a **74** d
75 c **76** c
77 d **78** c
79 a et C

Chapitre G1
Vecteurs et droites du plan

Auto-évaluation

1 **1)** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

2 **1)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

2) $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-21\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}-2\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

3) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

3 **1)** $\overrightarrow{FC}$ **2)** $\overrightarrow{CH}$ **3)** $\overrightarrow{AL}$ **4)** $\overrightarrow{FA}$

4 **1)** $\vec{0}$

2) $2\overrightarrow{AD}$

S'entraîner

1 **1)** Oui **2)** Oui **3)** Non

2 $2x+y-1=0$

3 $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

4 **1)** $y=x+2$

2) $y=-3x+\frac{1}{2}$

5 **1)** $-2\times(-1)+3\times 2-4=2+6-4=4\neq 0$ donc $A\notin d$.

2) Pour $y=0$, $x=-2$ donc le point $A(-2\,;\,0)$.

6 $\overrightarrow{AB}=3\vec{u}+2\vec{v}$
$\overrightarrow{AC}=-2\vec{u}$
$\overrightarrow{BC}=-5\vec{u}-2\vec{v}$

8 **1)** (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

2) (AB) et (CD) sont parallèles.

3) (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

4) (AB) et (CD) sont parallèles.

5) (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

10 **1)** A, B et C ne sont pas alignés.

2) A, B et C sont alignés.

3) A, B et C ne sont pas alignés.

27 **1)** $M\in d_1 \Leftrightarrow 3x+2y-10=0$.

2) $M\in d_2 \Leftrightarrow 5x-y=0$.

3) $M\in d_3 \Leftrightarrow -\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-\frac{1}{3}=0$.

4) $M\in d_4 \Leftrightarrow 2x-2=0$

28 **1)** Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,3)$ est un point de d.

2) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-25\\12\end{pmatrix}$.
$A\left(0\,;\,\frac{7}{25}\right)$ est un point de d.

3) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,-8)$ est un point de d.

4) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.
$A\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ est un point de d.

5) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,-5)$ est un point de d.

6) Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.
$A(0\,;\,1)$ est un point de d.

Auto-évaluation QCM

75 a et d **76** b et d
77 c **78** c
79 a **80** a
81 b et d **82** c
83 a **84** b
85 c **86** a

Chapitre G2

Angles orientés et trigonométrie

Auto-évaluation

1 L'arc $\widehat{IJ}$ mesure π radians.
L'angle mesure 180 degrés.

$\widehat{IOM}$ (deg)	60	≈ 57
$\widehat{IOM}$ (rad)	$\frac{\pi}{3}$	1

90	150	180
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

2 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{5} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$
$< \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$

3 $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{OH}{OA} = OH = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{OA} = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

S'entraîner

1

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$
x (deg)	36	60	72

$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
144	180	240

2

x (deg)	30	45	75
x (rad)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$

90	135	150
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

3 1) Faux 3) Vrai
2) Vrai 4) Faux

4 1) Les mesures principales de 15π, -3π, -6π, 28π et $-\pi$ sont respectivement π, π, 0, 0 et π.

2) Les mesures principales de $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{2}$ et $\frac{26\pi}{2}$ sont respectivement $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 et π.

5 1) $(\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{4}$
2) $(\vec{u}, -\vec{v}) = -\frac{3\pi}{4}$
3) $(-\vec{u}, -\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$
4) $(\vec{v}, -\vec{u}) = \frac{3\pi}{4}$

6 1) $\frac{2\pi}{3}$
2) $-\frac{2\pi}{3}$
3) $\frac{5\pi}{3}$
4) $\frac{\pi}{3}$

7 1) $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$
2) $(\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{t})$
3) $(\vec{t}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{t}) = (\vec{v}, \vec{w})$

8 1) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$
2) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$
3) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$

9

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$
0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

10 1) $A : -\frac{\pi}{4}$ $B : -\frac{5\pi}{6}$ $C : \frac{5\pi}{6}$
$D : -\frac{\pi}{18}$ $E : \frac{2\pi}{3}$ $F : -\frac{6\pi}{10}$ $G : \frac{\pi}{6}$
$H : \frac{9\pi}{10}$

2) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{35\pi}{36}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{14\pi}{10}$, $\frac{9\pi}{10}$

16 1) $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ 3) $\left[-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right]$
2) $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ 4) $\left[-\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$

20 1) $\frac{3\pi}{5}$ car $-\frac{7\pi}{5} \notin]-\pi ; \pi]$ mais $-\frac{7\pi}{5} + 2\pi = \frac{3\pi}{5} \in]-\pi ; \pi]$
2) $\frac{\pi}{2}$ car $\frac{18\pi}{4} \notin]-\pi ; \pi]$ mais $\frac{18\pi}{4} - 4\pi = \frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi]$
3) $-\frac{2\pi}{3}$ car $\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi ; \pi]$ mais $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \in]-\pi ; \pi]$
4) $\frac{7\pi}{10}$ car $\frac{7\pi}{10} \in]-\pi ; \pi]$

32 $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

38 **1)** $-2\cos x$

2) $= 2\cos x$

3) $= -2\sin x$

4) $= 2\sin x$

41 **1)** $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

45 **1)** $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -\frac{7}{8}$

2) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{3}$

49 **1)** $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on résout $\cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$, ce qui est équivalent à $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4}$ pour $x \in]-\pi\,;\,\pi]$.

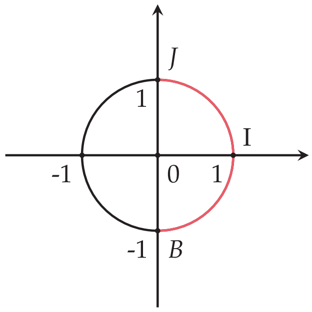
2) $S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi\right\}$; $\left\{-\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in Z\right\}$

50 **1)** **a)** $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\frac{\pi}{6}$

2) Dans $]-\pi\,;\,\pi]$, $S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right\}$ et dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi\right\}$; $\left\{\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in Z\right\}$.

54 **1)**



2) $S = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$

Auto-évaluation QCM

67 c et d	**68** a
69 c	**70** a et c
71 b	**72** d
73 a	**74** b et c
75 b et d	**76** d
77 a	**78** b
79 b	**80** b et d
81 a	**82** a
83 b	**84** b
85 b et d	**86** d
87 d	**88** b
89 b et d	**90** c
91 c	**92** a

Chapitre G3

Produit scalaire dans le plan

Auto-évaluation

1 **1)** Vrai : $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.

2) Faux : $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.

3) Faux : $\|-5\vec{u}\| = 5\,\|\vec{u}\|$.

2 $\vec{u} = -2\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}$

$\vec{v} = 3\overrightarrow{RA} - 2\overrightarrow{RB} - \overrightarrow{RC}$.

3 **1)** Le repère $\left(A\,;\,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$ convient.

2) Dans ce repère, $A(0\,;\,0)$, $B(2\,;\,0)$, $C(2\,;\,3)$ et $D(0\,;\,3)$.

4 **1)** **a)** $\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

b) $-\frac{\pi}{4}(2\pi)$

c) $-\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

d) $\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

2) $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 **1)** $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **3)** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

2) $\vec{u_2}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

S'entraîner

1 **1)** $\frac{39}{2}$ **4)** -5

2) 45 **5)** -128

3) 30

2 • $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BL} = BC \times BJ$

• $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} = -IB \times IA$

• $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LK} = AB \times AI$

3 **1)** $\vec{n_1}\begin{pmatrix}65\\-12\end{pmatrix}$ **3)** $\vec{n_5}\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$

2) $\vec{n_3}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ **4)** $\vec{n_6}\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}$

4 Oui car $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$ donc est normal à d et $2x_T - 8y_T + 28 =$ $2 \times 14 - 8 \times 7 + 28 = 0$ donc $T \in d$.

5 **1)** $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $A(2\,;\,5)$ et de rayon 3.
2) $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $B(-3\,;\,7)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

6 **1)** (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.
2) (EF) et d_1 sont perpendiculaires.
3) d_2 et d_3 sont perpendiculaires.

13 **1)** Le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ convient.
Dans ce repère $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(1\,;\,1)$, $D(0\,;\,1)$, $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $L\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
2)
a) 1 **c)** $\frac{1}{4}$
b) $-\frac{3}{4}$ **d)** $-\frac{1}{2}$

19 **1)** (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.
2) **a)** (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
b) (BE) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

44 **1)** **a)** $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = 8$, $\left\|\overrightarrow{RS}\right\| = 2\sqrt{10}$ $\left\|\overrightarrow{RT}\right\| = 4\sqrt{5}$
b) $\cos\left(\widehat{SRT}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ donc $\widehat{SRT} \approx 81{,}87°$.
2) $\widehat{RST} \approx 60{,}26°$
3) $\widehat{STR} \approx 37{,}87$

65 **1)** $x + 3y + 13 = 0$
2) $2y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 6$
3) $10x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
4) $-4x + 6y - 42 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 21 = 0$
5) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - (7\sqrt{2} + 8\sqrt{3}) = 0$

73 **1)** $(1-x)(4-x) + (2-y)(6-y) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 - 8y + 16 = 0$
2) $(4-x)(-3-x) + (6-y)(-8-y) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 2y - 60 = 0$
3) $(1-x)(-3-x) + (2-y)(-8-y) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 6y - 19 = 0$

Auto-évaluation QCM

100 b **101** d
102 a **103** b
104 b **105** a c
106 d **107** a
108 a c **109** c d
110 a c **111** b
112 a d **113** d
114 c

Chapitre SP1
Statistiques

Auto-évaluation

1 **1)** La première ligne correspond aux valeurs et la deuxième aux effectifs.
2) 35
3) 5
4) $Q_1 = 3$ et $Q_3 = 5$
5) $\frac{152}{35}$

2 **1)** 256 ; 288 ; 320 ; 336 ; 352 et 512
2) 328
3) Non : la moyenne est 344.
4) N'importe quel multiple de 16 inférieur ou égal à 320.

3 **1)** 37
2) 271

S'entraîner

1 L'intervalle interquartile est $[105\,;\,135]$ et l'écart interquartile est 30.
2 2 ; 9 ; 12 ; 24 ; 36.
3 $\sigma \simeq 194$
4 $\sigma \simeq 2{,}1$
5 La série 0 ; 0 ; 20 et 20 convient ($\sigma = 10$ et écart interquartile = 20).
6 La moyenne est 12, la variance est $\frac{26}{3}$ et $\sqrt{\frac{26}{3}} \approx 2{,}9$.
7 C'est la série 5 ; 12 ; 1 ; 13 ; 2 car ses valeurs semblent plus éloignées les unes des autres.
8 $x_1 + x_4 + x_5$
9 $n_{12} + n_{11} + n_{10} - n_6$
10 Les séries 9 ; 10 ; 11 et 5 ; 10 ; 15 conviennent (moyenne 10 et écart-type respectifs $\simeq 0{,}8$ et $\simeq 4{,}1$).