Cours Sainte Marie de Hann **2017-2018**
M. SARR **TS2**

Calcul intégrale et équations différentielle

Exercice 1: Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(xsin^2x + cos^4x)dx$;$\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}dx$;$\int_0^3(1-|x-1|^3)dx$; $\int_1^2 \frac{x-1}{|x^2-2x|+1}dx$;

$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt$; $\int_1^e \frac{lnt}{t^2}dt$; $\int_2^x ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)dt$, $x > 1$; $\int_0^\pi e^{-2x}sin^2xdx$; $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 sinxdx$;

$\int_0^1 ln^2xdx$; $\int_1^e \left(\frac{lnx}{x} + \frac{ln^2x}{x}\right)dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(tanx - \frac{1}{tanx}\right)dx$; $\int_0^\pi (cosx)e^{2x}dx$

Exercice 2 :

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\frac{u^2-1}{2u-1} = ax + b + \frac{c}{2u-1}$, $u \neq \frac{1}{2}$
2) Calculer : $\int_{-1}^0 \frac{x^2-1}{2x-1}dx$
3) Calculer : $\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{cos^3x}{1-2sinx}dx$
4) Justifier que : $\frac{1}{cosx} = \frac{1}{2}\left(\frac{cosx}{1+sinx} + \frac{cosx}{1-sinx}\right)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$
5) En déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cosx}$

Exercice 3 :

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$, $n \in N$
1) Calculer I_0 *et* I_1
2) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n
3) En déduire I_5

Exercice 4 :

1) On pose $u_n = \int_1^e (lnx)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$ Calculer u_0 *et* u_1 puis établir une relation entre u_{n+1} et u_n
2) On pose : $v_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x}cosxdx$.
a) Calculer v_n et montrer que (v_n) est une suite géométrique.
b) Calculer $S_n = \sum_{i=0}^n v_i$ puis $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 5 :

On considère l'intégral $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(sinx)^n}{cosx}dx$

1) Calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^n x cosxdx$. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.
2) Calculer I_3 et I_5
3) Soit f l'application qui à tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ associe $f(x) = ln\left[tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$
a) Montrer que f est une primitive de de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = \frac{1}{cosx}$
b) En déduire I_2 et I_4

Exercice 6:

1- On considère l'équation différentielle (E) : $y" - 3y' + 2y = 0$
a) Résoudre l'équation différentielle (E)

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 la même tangente que la courbe de la fonction $f(x) = e^{3x}$

2- Déterminer la fonction g deux fois dérivable sur R telle que $9g''(x) - 18g'(x) + 10g(x) = 0$ et dont la courbe passe par les points $A(0;\ \sqrt{3})\ \ et\ \ B(\pi; 0)$

3- Soit $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, résoudre l'équation différentielle : $(1 + cos2\theta)y'' - (2sin2\theta)y' + 2y = 0$

<u>Exercice 7 :</u>

1- Résoudre les équations différentielles :

a) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$; b) $y' + y = xe^{-x}$; c) $y' - y = sinx$; e) $y' - y = e^x$

2- Résoudre l'équation différentielle: $4y'' - 12y' + 9y = (9x + 3)e^{3x}$

3- Soit l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$ (1)

a) Vérifier que la fonction f telle que : $f(x) = e^{-x}lnx$ est solution de (1)

b) En déduire la solution générale de (1)

<u>Exercice 8 :</u>

1- Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$

2- Déterminer la solution qui vérifie : $f(0) = 1\ \ et\ f'(0) = -1$