# Série d'exercices : fonctions logarithmes

***Exercice 1 :***

Dans chaque cas déterminer $D_f$ , calculer limites aux bornes de $D_f$ et calculer $f'(x)$

a) $f(x) = ln(x^2 + x + 1)$, b) $f(x) = xlnx - x$, c) $f(x) = xln(x^2 - 1)$, d) $f(x) = \frac{lnx}{x}$, e) $f(x) = x - lnx$, f) $f(x) = ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$, g) $f(x) = \frac{lnx}{x-1}$, h) $f(x) = \frac{x+1}{x} + lnx - \ln(x+1)$, i) $f(x) = \frac{1}{ln^2 x} - \frac{1}{lnx}$, j) $f(x) = \frac{ln(x^2+1)}{x}$, k) $f(x) = xln\left(\frac{x+2}{x}\right)$, l) $f(x) = (x-2)ln\left(\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right)$, m) $f(x) = xln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 1$, n) $f(x) = ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$, o) $f(x) = \frac{ln(2+cosx)}{x}$, p) $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, q) $f(x) = (x^2-1)ln\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ ,

***Exercice 1 :*** Soit *f* la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x} & si\ \ x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (lnx)^2 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

1. a. Déterminer le domaine de définition de *f*.
   b. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* sur son domaine.
   c. déterminer les limites aux bornes de $D_f$ et préciser les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$
   d. Etudier les variations de *f*
   e. Montrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ . Tracer $(\mathcal{C}_f)$.
2. Soit h la restriction de *f* à $I = ]1;\ +\infty[$
   a. démontrer que *h* réalise une bijection de I vers J à préciser.
   b. En déduire que *h* admet une fonction réciproque $h^{-1}$ dont on précisera le sens de variation.
   c. Justifier que $h^{-1}$ est dérivable en 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$. Expliciter $h^{-1}$.

***Exercice 3 :*** Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x+1) - \ln(3-x)$

1. Etudier *f* et tracer sa courbe.
2. Démontrer que la courbe de *f* coupe l'axe des abscisses en un seul point Ω.
3. Démontrer que Ω est un centre de symétrie de la courbe de *f.*
4. Donner une équation de tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 1.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dont on précisera un encadre à $10^{-1}$.
6. Résoudre graphiquement l'inéquation : $-1 \leq f(x)$.
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in ]2;3[$ .

***Problème 1 :***

**Partie A :** On considère la fonction $h$ definie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = lnx + \frac{x^2-x+1}{2x^2}$

1) Montrer que sa dérivée est : $h'(x) = \frac{2x^2+x-2}{2x^3}$
2) Etudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$
3) Dresser un tableau de variations de $h$ sur $]0;+\infty[$.En déduire le signe de $h(x) sur\ ]0;+\infty[$.

**Partie B :** On considère la fonction $f$ definie par : $f(x) = (x^2+1)lnx - x$

1) Calculer sa dérivée et montrer l'équivalence suivante : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0$
2) En déduire les variations de $f$ sur $]0;+\infty[$.
3) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f .
4) Dresser un tableau de variation complet de la fonction $f$ sur $]0;+\infty[$
5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, que $\alpha$, sur $]0;+\infty[$.
6) Montrer que $\alpha \epsilon ]1;2[$.
7) Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ prés.

***Problème 2 :*** Soit *f* la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ln(x^2+1)}{x} & si\ x > 0 \\ f(x) = x + \ln(1-x) & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

*Partie A :* Soit g la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - ln(x^2+1)$

1. Etudier les variations de $g$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution qu'on encadrera par deux entiers naturels consécutifs
3. Préciser le signe de *g* sur $[0;\ +\infty[$ .

*Partie B :* 1. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* sur $D_f$

1. Calculer les limites aux bornes de $D_f$
2. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g'(x)}{x^2}$.
5. Dresser le tableau de variation de *f* et tracer $(\mathcal{C}_f)$
6. Soit *h* la restriction de *f* à $]-\infty;\ \ 0[$

a. Montrer que *h* admet une bijection réciproque $h^{-1}$ dont on précisera le domaine de définition. Tracer la courbe de $h^{-1}$.

b. Calculer *h(*-1). En déduire que $h^{-1}$ est dérivable en $-1 + ln2$ et calculer $(h^{-1})'(-1 + ln2)$.

***Problème 3 :***

A- On considère la fonction *g* définie de IR vers IR par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Etudier les variations de *g*sur $]0;\ +\infty[$.
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0;\ +\infty[$.
3. Etudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$. Vérifier que $\alpha \in \left]2; \frac{17}{8}\right[$.

B- On considère la fonction *f* de IR vers IR par : $f(x) = \ln(1 + |x|) + \frac{3}{2x^2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

1. Trouver l'ensemble de définition de *f*
2. Montrer que *f* est paire .
3. Justifier que l'étude de *f* peut être limité à l'intervalle $I = ]0;\ +\infty[$.
4. Calculer les limites aux bornes de $I$.
5. Etudier la branche infinie en $+\infty$.
6. Etudier les variations de *f* sur $I$. En déduire que *f* admet un minimum relatif en $\alpha$.
7. Tracer entièrement $(\mathcal{C}_f)$ .

***Problème 4 :***On considère la fonction $f_n$définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 - nx + \dfrac{1}{lnx} & si\ x \in ]0; +\infty[ \\ f_n(0) = 2 & \end{cases}$$

On note par $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de $f_n$

1. Déterminer le domaine de définition$D_n$de $f_n$.
2. Etudier la continuité de $f_n$ sur son domaine.
3. Etudier la dérivabilité de $f_n$ en 0. Que peut on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_n$ ?
4. Etudier les variations de $f_n$. (distinguer les cas $n = 0\ \ et\ \ n \neq 0$).
5. Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_n$. (distinguer les cas $n = 0\ \ et\ \ n \neq 0$).
6. Construire les courbes $\mathcal{C}_0$et $\mathcal{C}_1$ .(unité 2cm)
7. Soit $\varphi_n$ la restriction de $f_n$ à l'intervalle $]1;\ +\infty[$

a. Montrer que $\varphi_n$ est une bijection de $]1;\ +\infty[$sur un intervalle $I_n$ que l'on précisera.

b. Montrer que pour $n \neq 0$, l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une seul solution $\alpha_n$.

c. Montrer que : $2{,}9 < \alpha_1 < 3$ et $1{,}8 < \alpha_2 < 1{,}9$.

d. Construire dans le repère précédent les courbes des fonctions $\varphi_0^{-1}$et $\varphi_1^{-1}$.