Série : Nombres complexes

Exercice 1 :

1) Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2-3i)^4;\quad z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2;\quad z_3 = \frac{(2+i)(1+i)}{i-1};\quad z_4 = \frac{z-3i}{z+2i}\ \ avec\ z = x+iy;$$
$$z_5 = \frac{2i}{2-3i} - \frac{1+i}{i+2}$$

2) Déterminer le module puis le conjugué des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1+i\sqrt{3};\ z_2 = (\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})(\sqrt{5}+i\sqrt{2});\ z_3 = (1+i)^8;\ z_4 = \frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$$

Exercice 2 : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1) Déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$a)|z-3| = |z+i|$; b) $|iz+3| = |z+4+i|$; c) $\left|\bar{z}+\frac{1}{3}i\right| = 3$; d) $|z-\bar{z}+i| = 2$;
e) $|\bar{z}-2+i| = |z+5-2i|$

2) Pour tout nombre complexe $z \neq -1+2i$, on pose $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|Z| = 1$; b) $|Z| = 2$; c) $Z\ soit\ un\ réel$;
d) $Z\ soit\ un\ imaginaire\ pur$.

3) Pour tout nombre complexe $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z+i}{z-i}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $Z \in \mathbb{R}_-^*$; b) $Z \in \mathbb{R}_+^*$; c) $Z \in i\mathbb{R}$

Exercice 3 :

1) Déterminer un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$a = (-1-i)^2;\quad b = -1+i\sqrt{3};\quad c = i-\sqrt{3}\,;d = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i};\ \ e = (1+i)(\sqrt{3}+i); f = -3i$$

2) On pose : $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1-i\ \ et\ z_3 = \frac{z_1}{z_2}$, déterminer un argument de z_1, z_2 et z_3. En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

3) On considère les nombre complexes : $a = 1-i$; $b = 1-i\sqrt{3}$ et $Z = \frac{a^5}{b^4}$

a) Déterminer une écriture trigonométrique de Z

b) Déterminer une écriture cartésienne de Z. En déduire $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

c) Calculer Z^{12} et Z^{2018}

d) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n : 1) Z^n est un réel ? 2) Z^n est un imaginaire pur ?

Exercice 4 :

1) Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a)$z = \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4}$; b) $= (1+i)e^{i\frac{3\pi}{4}}$; c) $z = -5\left(cos\frac{4\pi}{9} - isin\frac{4\pi}{9}\right)$; d) $z = sin\theta + icos\theta,\ \ \theta \in \left]-\pi;\ \pi\right]$

2) Déterminer une forme exponentielle des complexes suivants:

a) $a = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$, b) $b = 1-i\sqrt{3}$, c) $c = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, e) $e = ab$, f) $f = b^3$, g) $g = abc$, h) $h = \frac{a}{b}$

Exercice 5:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a)$\bar{z} = i-z$, b) $2z+\bar{z} = i-z$, c) $z^2 = |\bar{z}|$, d) $2z^2-6z+5 = 0$, e) $z^4+8z^2+9 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 3z+z' = 5+2i \\ -z+iz' = 1-i \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+i)z+(1-i)z' = 2+i \\ 3z-2iz' = 4-i \end{cases}$

3) Résoudre chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une solution réelle :

a) $z^3-(1+i)z^2-2(1+i)z+8 = 0$; b) $iz^3+(3-5i)z^2+(16-2i)z+20-24i = 0$

4) Résoudre chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure :

a) $z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+18i = 0$; b) $z^3+(-1+5i)z^2-(7+4i)z+3-3i = 0$

Exercice 6 :

1) On pose : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

a)Montrer que $\forall\ \alpha \in \mathbb{C},\ P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.

En déduire que si α est une racine de P alors $\bar{\alpha}$ est une racine de P.

b) Calculer $P(1+i)$. En déduire deux racines de P.

c) Mettre $P(z)$ sous f d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficient réels.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Soit $\theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) : $z^2 - (2sin\theta)z + 1 = 0$

a) Résoudre l'équation (E)

b) Montrer que les images des solutions de (E) appartiennent au cercle trigonométrique.

Exercice 7 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 1$
2) Développer $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$
3) En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$, résoudre l'équation , (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$
4) Déterminer sous forme algébrique puis trigonométrique les solutions de (E).
5) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et de $sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 8 :

1) Soit $\theta \in IR$, Montrer que : $1 + e^{i\theta} = 2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = 2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
2) En déduire l'écriture trigonométrique des complexes ; $1 + e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$,

Exercice 9 :

1) Vérifier que pour $z \neq 1,\ on\ a$: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1-z^5}{1-z}$
2) On suppose que $z = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5}$, déterminer les valeurs de :
   $X = cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} + cos\frac{6\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5}$ et$Y = sin\frac{2\pi}{5} + sin\frac{4\pi}{5} + sin\frac{6\pi}{5} + sin\frac{8\pi}{5}$

Exercice 10 :

On considère l'équation : (E) : $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i = 0$

1) Déterminer la solution réel et la solution imaginaire pure de cette équation .
2) Résoudre l'équation (E).
3) Soient les points A, B , C et D d'affixes respectives 1, i , $2 + i$ $et 1 + i$

a) Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Démontrer que les points A, B , C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11 :

Soit $P(z) = z^3 - (i + 2icos\alpha)z^2 - (1 + cos\alpha)^2 z + i(1 + cos^2\alpha)$ où $\alpha\ est\ un\ réel\ tel\ que\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

On note par $a,\ b\ et\ c$ les trois racines de P.

1) Sans calculer $a,\ b\ et\ c$, calculer : $S = a + b + c$; $S' = ab + bc + ca\ \ et\ \ \Pi = abc$
2) Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à $2icos\alpha$, utiliser les résultats précédents pour résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 12 :

Soit l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$

1) Résoudre l'équation (E).
2) Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle. En déduire que $cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.
3) Démontrer que $cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$
4) En déduire la valeur exacte $cos\frac{2\pi}{5}$.