1 Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1/ La machine A assure 40% de la production et la machine B en assure le reste.
On estime que 10% des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9% des pièces issues de la machine B ont un défaut.
On choisit une pièce au hasard et on note :
A :« la pièce est produite par la machine A »
B :« la pièce est produite par la machine B »
D :« la pièce a un défaut »

- **a/** Traduire la situation à l'aide d' un arbre pondéré .
- **b/** Calculer la probabilité que la pièce présente un défaut et ait été produite par la machine A.
- **c/** Démontrer que $P(D) = 0,094$.
- **d/** On constate que la pièce choisie a un défaut. Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A?

2/ 10 pièces sont choisies au hasard dans la production de cette usine. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses parmi les 10 pièces choisies.

- **a/** Quelle est la loi de probabilité suivie par X? Justifier.
- **b/** Quelle est la probabilité qu'il ait exactement deux pièces défectueuses.
- **c/** Quelle est la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse?
- **d/** Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une pièce défectueuse?
- **e/** Combien de pièces au maximum faut-il choisir pour que la probabilité qu'il ait au moins une pièce défectueuse soit inférieure à 0,001?

2 Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.
Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A »;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B »;
V : « la bille est vendable ».

1/ Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2/ Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3/ Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison?

3 Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

F l'événement « le membre choisi est une femme »,

T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1/ Montrer $P(F) = \dfrac{2}{5}$.

2/ On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1/ Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

- **a/** Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
- **b/** Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
  Montrer que pour tout entier n non nul,
  $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.
- **c/** Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

2/ Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

- **a/** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
- **b/** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

4 Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'événement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1/ Détermination d'une relation de récurrence.

- **a/** Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
- **b/** Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n
- **c/** Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.
- **d/** En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.

2/ Étude de la suite (p_n).

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

- **a/** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
- **b/** Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
- **c/** Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

5 Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'événement « le n-ième sondage est positif» est noté V_n et on note p_n la probabilité de l'événement V_n.

L' expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0.6 d'être aussi positif.
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0.9 d'être aussi négatif.

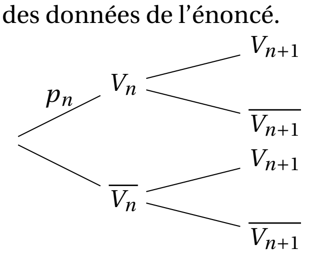
On suppose que le premier sondage est positif , c'est-à-dire que $p_1 = 1$.

1/ Calculer les probabilités des événements suivants.

- **a/** A : « le $2^{\text{ème}}$ sondage et le $3^{\text{ème}}$ sont positifs».
- **b/** B : « le $2^{\text{ème}}$ sondage et le $3^{\text{ème}}$ sont négatifs».
- **c/** Calculer la probabilité p_3 que le $3^{\text{ème}}$ sondage soit positif».
- **d/** Calculer la probabilité que le $2^{\text{ème}}$ sondage soit positif sachant que le $3^{\text{ème}}$ sondage soit positif».

2/ n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- **a/** Recopier et complète l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé.



- **b/** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$
- **c/** On note u la suite définie pour tout entier non nul n, par : $u_{n+1} = p_n - 0,2$. Démontrer que u est une suite géométrique puis exprimer p_n en fonction de n. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

3/ Une entreprise de travaux publics construit 10 tronçons d'autoroute. On considère que sur chaque tronçon il y a 10% de chance que des vestiges soient découverts. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tronçons pour lequel des vestiges sont découverts.

- **a/** Quelle est la loi de probabilité suivie par X?Justifier.
- **b/** Calculer la probabilité qu'aucun vestige ne soit découvert?
- **c/** Calculer la probabilité que des vestiges soient découverts sur exactement trois tronçons?

6 La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.

Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1/ **a/** Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.

- **b/** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} p_{n+1} &= 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} &= 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

2/ On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

- **a/** Montrer que (S_n) et (D_n) sont des suites géométriques dont on précisera les raisons.
- **b/** Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).
- **c/** En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter le résultat.