Cours Sainte Marie de Hann 2017-2018

M. SARR TS2

Série : Probabilité

Exercice 1 :

Une urne contient dix boules indiscernable au touché : une boule blanche porte le chiffre 0 ; trois boules de couleurs différentes portent le chiffre 1 et six boules de couleurs différentes portent le chiffre 2. On extrait simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule portant le chiffre 2 ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules portant le même chiffre ?
3) On désigne par X la somme des chiffres portés par les trois boules.
a) Déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance mathématique.
b) Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

Exercice 2 :

La probabilité que le bus emprunté par Fama chaque matin pour se rendre au lycée, arrive en retard est égale à 0,1. Fama prend le bus 10 fois de suite.

1) Calculer la probabilité que le bus arrive en retard exactement 4 fois.
2) Calculer la probabilité que le bus arrive en retard au moins une fois.
3) Calculer le nombre moyen de retard auxquels Fama peut s'attendre l'hors de nombreux trajets.
4) Le retard moyen d'un bus est de 4 minutes. Calculer le temps d'attente moyen de Fama pour ces dix jours.

Exercice 3:

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.
Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.
On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».
Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'évènement : «Le premier élève appartient au club théâtre».Calculer $p(T_1)$.

b. On appelle T2 l'évènement «L'élève pris en photo appartient au club théâtre».
Calculer $p(T_2/T_1)$, puis$(T_2/\overline{T_1})$. En déduire $p\,(T_2\cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$.

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.
Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 4 :

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.
On note A l'évènement « l'urne a est choisie » , B l'évènement « l'urne b est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches,
l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
a. Déterminer les probabilités suivantes : p (A), $p_A(R)$, p(A∩R).
b. Montrer que $p(R) = \frac{13}{30}$
c. Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit a ?
2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches
et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges
(où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.
a. Exprimer $p_A(R)$ et $p_B(R)$ en fonction de n.
b. Démontrer que : $p(R) = \frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}$
c. On sait que n ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition
possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus
grande valeur possible de p (R).

<u>Exercice 5 :</u>

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40% ont leurs faces marquées d'un cercle, 20% ont leurs faces
marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20% ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs
faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.
1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est
égale à $0{,}12+0{,}004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange
soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un
Cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.
Les résultats seront arrondis au millième.
1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

<u>Exercice 6 :</u>

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.
Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième
service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.
Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.
La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées
— si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ;
— si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse
le suivant vaut 0,7.
1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.
a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)
b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
2. On s'intéresse maintenant au cas général.
a. Donner les probabilités conditionnelles $p(R_{n+1}/R_n)$ et $p(R_{n+1}/\overline{R_n})$

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :$x_{n+1} = 0{,}1x_n + 07$
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.
a. Déterminer la nature de la suite (u_n).
b. En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 7 :

En 2012, dans une ville, les taxis appliquent des tarifs différents suivant le type de trajet. Pour un trajet entre le centre- ville et l'aéroport, le chauffeur applique un prix forfaitaire de 2500 F. Pour un trajet à l'intérieure de ville le prix moyen est de 1000 F. A une station de taxi, un passager sur cinq effectue un trajet entre le centre-ville et l'aéroport. Un taxi ne sait pas où va son passager a priori et il peut charger deux fois la même personne.

Un chauffeur de taxi qui travaille très souvent à cette gare charge successivement 4 personnes.
1) Calculer la probabilité que le chauffeur de taxi effectue :

a) Exactement deux trajets entre le centre-ville et l'aéroport ;
b) Au moins un trajet entre le centre-ville et l'aéroport.

2) calculer la recette moyenne que le chauffeur peut espérer pour ces 4 trajets.

Exercice 8 :

On étudie le trafic sur un tronçon d'autoroute d'une grande ville. On constate que la moitié des véhicules empruntant cette autoroute sont des voitures de transport, et que 40% sont des voitures particulières. Les autres sont des camions. La société exploitant cette autoroute propose des abonnements aux usagers. Parmi les conducteurs de voitures particuliers,60% n'ont pas souscrit d'abonnement. 20% des conducteurs de camion et 20% des conducteurs de transport en commun se sont abonnés. Un véhicule se présente au péage.

On note les évènements suivants :

- T : « le véhicule est une voiture de transport en commun»
- P : « le véhicule est une voiture particulière »
- C : « le véhicule est un camion »
- A : « le conducteur a souscrit un abonnement »

1) Montrer que la probabilité que le conducteur arrivant au péage ait souscrit un abonnement est 0,28.
2) Sachant que le conducteur est un abonné, calculer la probabilité que sont véhicule sont un transport en commun.
3) Quatre véhicules arrivent au péage, indépendamment les uns des autres/
a) Calculer la probabilité que deux exactement soient ceux de deux abonnés.
b) Calculer la probabilité qu'au moins un véhicule soit celui d'un abonné.
4) Le tarif pour emprunter ce tronçon d'autoroute est de 500 F pour une voiture particulière, 1000 F pour une voiture de transport et 1500 F pour un camion. L'abonnement permet d'obtenir une réduction de 20%.
   a) Calculer la probabilité que le conducteur paye exactement .
   b) Calculer la probabilité que le conducteur paye 800 F.
   c) Etablir la loi de probabilité de la variable aléatoire S égale à la somme payée par le conducteur.

d) Calculer la somme payée en moyenne par véhicule quand un grand nombre de véhicule se présentent au péage.

Exercice 9 :

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

On note V_n l'évènement : « le n-ième sondage est positif ». On note p_n la probabilité de V_n

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- Si un sondage est positif, le suivant a une probabilité d'être aussi positif, égale à 0,6
- Si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité d'être aussi négatif, égale à 0,9.

On suppose que le premier sondage est positif.

1) Calculer la probabilité que :
a) Le deuxième et le troisième sondage soit positifs.
b) Le troisième sondage soit positif.
2) Montrer que $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$
3) On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = p_n - 0{,}2$
a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.
b) Etudier les variations de (u_n) puis de la suite (p_n)
c) Exprimer p_n en fonction de n
d) Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de p_n. Interpréter.

Exercice 10 :

Une boite de jeu est constituée de questions portant sur les thèmes Sport ou Musique. Un tiers des questions portent le thème Sport, les autres portent sur le thème Musique.

On pose à Fama une question une question choisie au hasard dans la boite et on sait que :

- La probabilité que Fama réponde correctement à une question Sport est $\frac{1}{2}$
- La probabilité que Fama réponde correctement à une question Musique est $\frac{3}{4}$

On note :

C : « la question porte sur le Sport »

M : « la question porte sur la musique »

E : « fama a répondu correctement à la question »

1) Déterminer la probabilité de l'évènement « la question posée porte sur la Musique et fama à répondu correctement ».
2) Montrer que la probabilité de E est $\frac{2}{3}$
3) On suppose que fama n'a pas répondu correctement à la question posée.
Quelle est la probabilité pour que la question posée ait porté sur le thème Sport ?
4) On pose successivement à fama quatre questions indépendantes les unes des autres.
Calculer la probabilité que fama réponde correctement à au moins une question posée.