Cours Sainte Marie de Hann **2017-2018**

M. SARR **TS2**

Série : Similitudes directes

Exercice 1 :

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F dont l'écriture complexe est donnée dans chacun des cas suivants. Déterminer l'expression analytique de F et l'écriture complexe de F^{-1}.

a)$z' = -3z + 2 - i$; b) $z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z - i + 1$; c) $z' = z + 2 - 3i$; d) $z' = \left(-\sqrt{3} - i\right)z - i$

2) Déterminer l'écriture complexe de FoG et GoF dans chacun des cas suivants :

a) $F: M(z) \longmapsto M'(z'), \text{avec} z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1$; $G: M(z) \longmapsto M'(z') \text{avec} z' = -4z + 1 - i$

b) $F: M(z) \longmapsto M'(z'), \text{avec} z' = (-1 + i)z - 1 + 1$; $G: M(z) \longmapsto M'(z') \text{avec} z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + i$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la transformation F ainsi que de ses caractéristiques si elles ne sont pas données :

1) F est la rotation de centre $I(1 - 2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2) F est l'homothétie de centre transformant $A(1 + 2i)$ et $B(-2 + i)$ respectivement en $A'(-2 - 3i)$ et $B(2 - \frac{5}{3}i)$.
3) F est la transformation toh où t est la translation de vecteur $\vec{u}(1 - 2i)$ et h est l'homothétie de centre $\Omega(1 + i)$ et de rapport 2.
4) F est la similitude plane directe de centre $A(-2i)$ de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
5) F est la similitude plane directe transformant les points $A(-1 + i)$ et $B(3 - 2i)$ respectivement en $A(i)$ et $B\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)$.

Exercice 3 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit F l'application de $\mathcal{P}$ $dans$ $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z)$ tel que : $z' = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $A(2)$

1. a) Déterminer l'affixe de F(A)
   b) Déterminer l'affixe du point E tel que $F(E) = O$
2. déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F.
3. montrer que le triangle AMM' est rectangle en M'.
4. déterminer l'image de la droite (AE) par F.
5. déterminer l'image cercle de diamètre [AE] par F.
6. soit S la similitude plane directe ayant pour écriture complexe : $z' = az + b$. Déterminer a et b pour qu'on ait : $SoS = F$.

Exercice 4 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient $A(1+2i),\ B(-2+i)\ et\ C(2-i)$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre C transformant A en B.
2) Soit S_2 la transformation plane qui tout point $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z + \frac{1-3i}{2}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S_2.
3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S = S_1 o S_2$.
4) Donner l'expression analytique de S_2.
5) Soit T la transformation qui à $M(z = x+iy) \longmapsto M'(z' = x' + iy')$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - 1 \\ y' = -x\sqrt{3} + y + 1 \end{cases}$

a) Exprimer z' en fonction de z, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de T.
b) Déterminer l'image de la droite $(D): x - 2y + 3 = 0$ et du cercle $(C): x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ par la transformation T.
c) Soit T' la transformation qui à $M(z) \longmapsto M'(z')$ telle que : $z' = a^2 z + b$.Déterminer les complexes $a\ et\ \ b$ pour que la transformation $S_2 o T'$ soit une translation de vecteur $\vec{u}(0;1)$.

Exercice 5 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soit F l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par : $z' = (1-i)z + 3 - 2i$. Soit a un complexe non nul et b un complexe, on désigne par F' l'application de $\mathcal{P}\ dans\ \mathcal{P}$ qui à tout point $N(z) \longmapsto N'(z' = az + b)$. Déterminer a et b pour que FoF' soit:

a) L'homothétie de centre O et de rapport 2.
b) La translation de vecteur $\vec{u}(2-2i)$.
c) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 6 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (\sqrt{3} - 3i)z - 8 = 0$.
2) Soit $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i$. Calculer $P(-i)$; résoudre l'équation $P(z) = 0$. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.
3) Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Placer les points $A(-i)$, $B(\sqrt{3} + i)$et $C(-2\sqrt{3} + 2i)$. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;4),\ (B;2),\ (C;1)\}$.
4) Déterminer le centre, le rapport et une mesure de l'angle de la similitude directe S telle que $S(A) = B$ et $S(B) = C$.

Exercice 7 :

1) Déterminer le module et un argument du complexe $u = \frac{\sqrt{3}+i}{4}$.
2) Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui à tout nombre complexe $z \longmapsto f(z) = uz + (1+i)(1-u)$ Montrer que f est bijective et déterminer le complexe w tel que $f(w) = w$.
3) Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes respectivement w, z et $f(z)$. On suppose M différent de I.

a) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{IM};\ \overrightarrow{IM'}\right)$, et calculer IM' en fonction de IM.

b) On note F l'application qui à tout point M associe M'. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de F.

4) Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1 + 2i$, on définit pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = f(z_n)$ et A_n le point d'affixe z_n.

a) Calculer en fonction de n la distance IA_n.

b) Quelle est la limite de cette distance quand n tend vers $+\infty$.